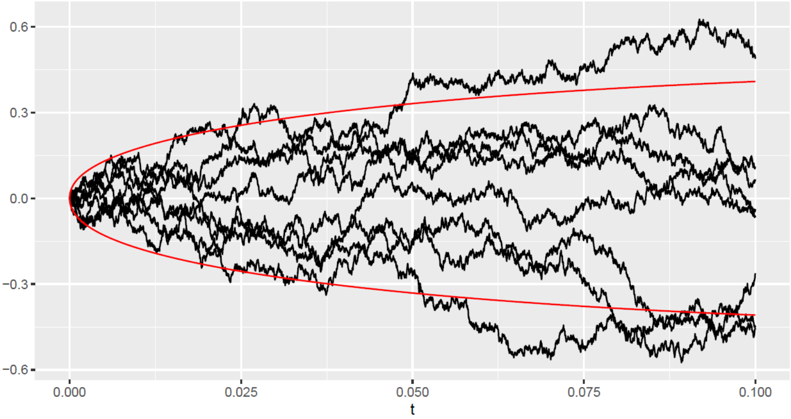
O Wienerově procesu


0.6
0.3
0.0
−0.3
−0.6
0.000
0.025
0.050
0.075
0.100
t

Trocha historie

- ➜ 29.března 1900 Louis Jean Baptiste Bachelier (doktorand J.H. Poincarého) prezentoval na přírodovědné fakultě pařížské akademie svou doktorskou práci, zabývající se „vzorcem, který popisuje pravděpodobnost tržní fluktuace“
  - řešení problému obsahovalo mnoho nových ideí včetně dnešního „Brownova pohybu“
- ➜ v roce 1828 botanik Robert Brown pozoroval, že zrníčka pylu v kapce vody jsou v neustálém chaotickém pohybu
  - sám připustil, že nemá žádné vědecké vysvětlení tohoto fenoménu
- ➜ v roce 1905 našel vysvětlení Albert Einstein
  - klíčová myšlenka v jeho řešení byla definice stochastického procesu, který nazval „Brownovým pohybem“
  - neznaje Bachelierovu práci znovuobjevil, že Brownův pohyb úzce souvisí s difuzí částic
  - jako hlavní aplikaci své teorie našel velmi dobrý odhad Avogadrovy konstanty
  - Einsteinova práce implicitně předpokládala, že Brownův pohyb existuje
- ➜ o dvacet let později (1923) Norbert Wiener dokázal, že tento předpoklad je vskutku splněn

Einsteinovy předpoklady - moderní formulace

(P-a) $W(0) = 0$ a $\forall t > 0 \; W(t) \sim N(0, t)$

(P-b) $\forall \; 0 < s < t$, $W(t) - W(s)$ je nezávislá na $\{W(u)\}_{0 \leq u \leq s}$
(Markovská vlastnost / nezávislost přírůstků)

(P-c) náhodná veličina $W(t) - W(s)$ má stejné rozdělení jako $W(t - s)$
(stacionarita přírůstků)

(P-d) náhodná trajektorie $t \to W(t)$ je spojitá funkce skoro jistě

Proces splňující tyto předpoklady nazveme Wienerovým procesem, resp. Brownovým pohybem.

Takže proč jsou to předpoklady a ne fakta?

➜ problém je (P-d) — spojitost skoro jistě

➜ Paul Lévy (1937) dokázal, že pokud v (P-a) nahradíme normální rozdělení jakýmkoli jiným, pak buď

– neexistuje proces splňující (P-a)–(P-c)

nebo

– existuje, ale nesplňuje (P-d)

Wienerův proces - konečněrozměrná rozdělení

Definice

Řekneme, že náhodný proces $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ je centrovaný Gaussovský, pokud

$$(X(t_1), \ldots, X(t_k))^{\mathsf{T}} \sim N_k(0, R), \quad \forall\, t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}_0^+$$

Funkce $R(s, t) = \mathrm{E}\,(X(s)X(t))$ se nazývá kovarianční funkce procesu X.

Věta o konečněrozměrných rozděleních Wienerova procesu

Wienerův proces je centrovaný Gaussovský proces s kovarianční funkcí

$$R(s, t) = \min(s, t).$$

A naopak, každý skoro jistě spojitý centrovaný Gaussovský proces s kovarianční funkcí R, který začíná v 0, je Wienerův proces.

Wienerův proces - existence

Wienerův důkaz existence Wienerova procesu na $[0,1]$:

Buď $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ posloupnost i.i.d. náhodných veličin s rozdělením $N(0,1)$.

Ukáže, že Wienerův proces $\{W(t)\}_{0\leq t\leq 1}$ je limitou posloupnosti procesů

$$W_n(t) = tX_0 + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\frac{\sin(j\pi t)}{j}X_j, \qquad 0 \leq t \leq 1,\ n \in \mathbb{N}$$

Wienerova věta

Pokud je prostor, na němž jsou definovány $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$, úplný, tak

$$W(t) = \lim_{n\to\infty} W_{2^n}(t)$$

existuje skoro jistě, a konvergence je stejnoměrná pro všechna $t \in [0,1]$.
Proces W je Wienerův proces na $[0,1]$.

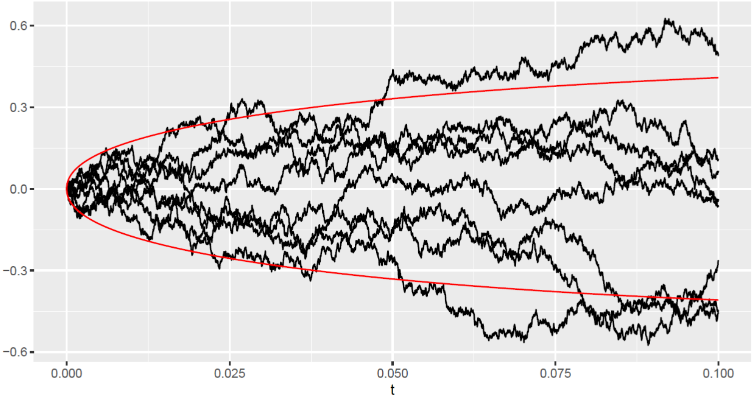
Pak proces „nasčítáváním“ rozšíří na $\mathbb{R}^+$.

Wienerův proces - existence

Moderní postup důkazu:

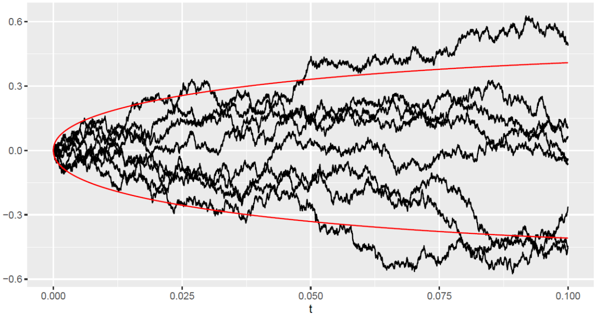
1. rozdělení přírůstků je určeno (P-b) – (P-d)
   normálnost se dokáže z obecné verze CLV
   $\mathsf{E}\,X$ a $\mathrm{var}X$ ze stacionarity přírůstků, spojitosti a řešení Cauchyho funkcionální rovnice
2. konstrukce pra-Wienerova procesu s odpovídajícími konečněrozměrnými rozděleními (Daniellova-Kolmogorovova věta)
3. konstrukce spojité modifikace $(\mathbb{P}(X(t) = W(t)) = 1,\ t \in [0, \infty))$ (Kolmogorova-Čencovova věta)

Wienerův proces - nediferencovatelnost trajektorií



Věta

Nechť je podkladový pravděpodobnostní prostor úplný.
Pak s pravděpodobností 1 trajektorie Wienerova procesu není diferencovatelná v žádném bodě.



Věta (zákon iterovaného logaritmu)

Pro Wienerův proces platí

$$\limsup_{t\to 0+} \frac{W(t)}{\sqrt{2t\log\log(\frac{1}{t})}} = \limsup_{t\to\infty} \frac{W(t)}{\sqrt{2t\log\log t}} = 1$$

$$\liminf_{t\to 0+} \frac{W(t)}{\sqrt{2t\log\log(\frac{1}{t})}} = \liminf_{t\to\infty} \frac{W(t)}{\sqrt{2t\log\log t}} = -1$$

skoro jistě.