Zvědavé otázky z pravděpodobnosti

1. Nechť A a B jsou neslučitelné (tj. disjunktní) jevy.
   (a) Mohou být tyto dva jevy nezávislé?
   (b) Pokud jsou nezávislé, čemu jen rovna $\mathsf{P}(A|B)$?

2. Rozhodněte, které z následujících výroků jsou pravdivé:
   (a) Indikátor měřitelné množiny nemusí být náhodná veličina.
   (b) Náhodná veličina $X(\omega) = c \in \mathbb{R}$ pro skoro všechna $\omega \in \Omega$ je náhodná veličina s diskrétním rozdělením.
   (c) Je-li náhodná veličina $X \geq 0$ s.j., pak musí být $\mathsf{E}X \geq 0$.
   (d) Existuje náhodná veličina X s $\mathsf{Var}\, X = 0$.
   (e) Rozptyl diskrétního rozdělení vždy existuje.
   (f) Jestliže mají dvě diskrétní náhodné veličiny stejnou střední hodnotu a rozptyl, pak mají i stejné rozdělení.

3. Nalezněte příklad:
   (a) Náhodné veličiny X, která nemá ani spojité ani diskrétní rozdělení.
   (b) Spojitého rozdělení, pro které neexistuje střední hodnota.
   (c) Spojitého rozdělení, jehož medián není určen jednoznačně.
   (d) Pro spojitou náhodnou veličinu X najdete příklad funkce h, pro které má $h(X)$ diskrétní rozdělení.
   (e) Lze nalézt funkci h tak, že X má diskrétní rozdělení a $h(X)$ spojité rozdělení?

4. Známe marginální rozdělení dvou veličin X a Y. Jsme z této informace schopni jednoznačně určit sdružené rozdělení náhodného vektoru (X,Y)? Vyberte pravdivá tvrzení.
   (a) Ano, nic dalšího nepotřebujeme.
   (b) Ne. Ale pokud známe navíc hodnotu korelačního koeficientu, pak ano.
   (c) Ne. Ale pokud navíc víme, že je jejich korelační koeficient nulový, pak ano.
   (d) Ne. Ale pokud navíc víme, že jsou X a Y nezávislé, pak ano.
   (e) Ne. Nic z předchozího nám nestačí a sdružené rozdělení z marginálních nejsme schopni zjistit nikdy.

5. Mějme dvě náhodné veličiny X a Y s konečnými druhými momenty definované na stejném pravděpodobnostním prostoru. Vyberte pravdivá tvrzení.
   (a) Rovnost $\mathsf{E}[XY] = \mathsf{E}[X]\mathsf{E}[Y]$ platí vždy.
   (b) Rovnost $\mathsf{E}[XY] = \mathsf{E}[X]\mathsf{E}[Y]$ platí, pokud X a Y jsou nekorelované.
   (c) Rovnost $\mathsf{E}[XY] = \mathsf{E}[X]\mathsf{E}[Y]$ platí, pokud X a Y jsou nezávislé.
   (d) Rovnost $\mathsf{E}[XY] = \mathsf{E}[X]\mathsf{E}[Y]$ neplatí nikdy.

6. Buď $\{X_n\}$ posloupnost nezávislých spojitých náhodných veličin takových, že pro každé $\varepsilon > 0$ je
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|X_n| > \varepsilon) = \infty.$$
Vyberte pravdivá tvrzení.
   (a) $\{X_n\}$ může konvergovat k nule v pravděpodobnosti.
   (b) $\{X_n\}$ určitě nekonverguje k nule v pravděpodobnosti.
   (c) $\{X_n\}$ konverguje k nule skoro jistě.
   (d) $\{X_n\}$ určitě nekonverguje k nule skoro jistě.

7. Vyberte pravdivá tvrzení.
   (a) Pokud $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.j.} 0$, pak $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$.
   (b) Pokud $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$, pak $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.j.} 0$.
   (c) Jsou-li $\{X_k\}$ nezávislé, stejně rozdělené s konečnou střední hodnotou, pak $\mathsf{E}\overline{X}_n$ se zmenšuje s rostoucím n.
   (d) Jsou-li $\{X_k\}$ nezávislé, stejně rozdělené s konečným rozptylem, pak $\mathsf{Var}\,\overline{X}_n$ se zmenšuje s rostoucím n.
   (e) Nechť posloupnost $\{X_k\}$ splňuje silný zákon velkých čísel. Pak $\overline{X}_n$ konverguje ke konstantě skoro jistě.
   (f) Je-li $X \sim \mathsf{N}(0,1)$ a $X_n = X$, pak $\{X_n\}$ nekonverguje v pravděpodobnosti.
   (g) Je-li $X \sim \mathsf{N}(0,1)$ a $X_n = X$, pak $\{X_n\}$ splňuje silný zákon velkých čísel.

8. Nechť X má $\mathsf{N}(0,1)$ rozdělení a definujeme $X_n = (-1)^n X$ pro $n \in \mathbb{N}$. Vyberte pravdivé tvrzení:
   (a) Veličiny X_1 a X_2 mají stejné rozdělení.
   (b) Veličiny X_1 a X_2 jsou nezávislé.
   (c) Posloupnost $\{X_n\}$ konverguje v distribuci.
   (d) Posloupnost $\{X_n\}$ nekonverguje v distribuci.
   (e) Obecně nelze říci, zda posloupnost X_n konverguje v distribuci.

9. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení $\mathsf{N}(\mu, 1)$. Uvažujme $T_n = X_1 + \frac{1}{n}$ jako odhad parametru μ. Rozhodněte o platnosti následujících výroků:
   (a) Odhad T_n je nestranný odhad μ.
   (b) Odhad T_n je asymptoticky nestranný odhad μ.
   (c) Odhad T_n je konzistentní odhad μ.
   (d) Odhad T_n je lepší než odhad $V_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} X_i$.