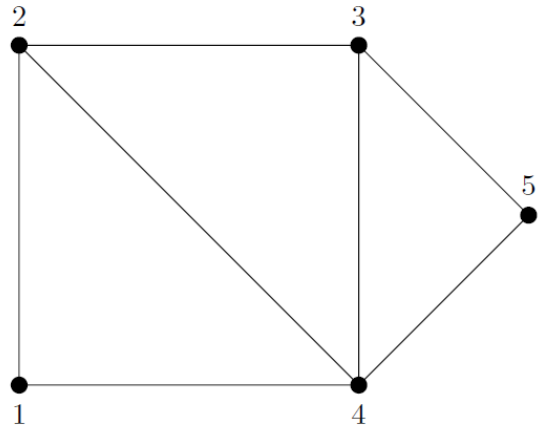
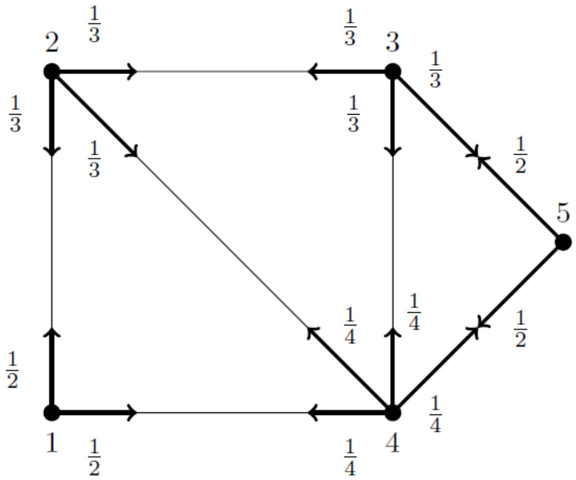
Zápočtová úloha č.2 — náhodná procházka po grafu

Neorientovaným grafem G rozumíme uspořádanou množinu $G = (V, E)$, kde V je spočetná množina tzv. vrcholů a E je množina dvouprvkových podmnožin V, tzv. hran. Graf lze reprezentovat tak, že každý vrchol vyznačíme bodem a hranu vyznačíme jako čáru, která spojuje dva vrcholy, například:



Lze se na něj dívat, jako na částečně nakreslený diagram markovského řetězce. Lze do něj přirozeným způsobem doplnit šipky a k nim pravděpodobnosti přechodu tak, abychom dostali symetrickou náhodnou procházku na grafu G. Stupeň v_i vrcholu $i \in V$ je počet hran, které do vrcholu i vstupují. Předpokládejme, že každý vrchol grafu G má konečný stupeň. Náhodná procházka na grafu G pak rovnoměrně vybírá mezi jednotlivými hranami, například:



Tedy pravděpodobnosti přechodu jsou dány

$$|_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{v_i}, & (i,j) \in E, \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

a předpokládejme, že graf G je souvislý (aby byl výsledný markovský řetězec nerozložitelný).

Úkoly:

1. Ukažte, že pro vektor $\mathbf{v} = (v_i, i \in V)$ a matici pravděpodobností přechodu $\mathrm{P} = (p_{i,j})_{i,j \in V}$ platí detailní podmínka rovnováhy. Z toho odvoďte, že vektor $\mathbf{v}/\sigma$, kde $\sigma = \sum_{i \in V} v_i$, je stacionární rozdělení náhodné procházky na grafu G.

2. Mějme standardní šachovnici 8 x 8 polí a nechť se kůň pohybuje tak, že v každém kroku si zvolí náhodně rovnoměrně mezi všemi políčky, na která může ze současné pozice skočit (podle pravidel pohybu šachového koně), a tím směrem se vydá. Předpokládejme, že začíná v rohu. Jak dlouho mu průměrně potrvá, než se opět do tohoto rohu vrátí? (Nápověda - použijte stacionární rozdělení z předchozího bodu a vhodnou větu z přednášky.)

3. Proveďte simulační studii. Simulujte pohyb koně z rohového políčka šachovnice a empiricky odhadněte průměrnou dobu do prvního návratu koně do (toho samého) rohového políčka. Porovnejte s výsledkem z předchozího bodu.

4. Dokažte větu: *Pro přechodný stav j platí* $\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)} = 0, \quad \forall i, j, \in S.$

   Návod: z přednášky z první věty v kapitole klasifikace stavů plyne, že $\lim_{n\to\infty} p_{j,j}^{(n)} = 0$ (proč a jak?). Rozepište $p_{i,j}^{(n)}$ pomocí $f_{i,j}^{(\cdot)}$ a $p_{j,j}^{(\cdot)}$ a postupujte analogicky jako v důkazu výše zmíněné věty.

5. Dokažte větu: *V nerozložitelném markovském řetězci s konečně mnoha stavy nemohou být všechny stavy přechodné.*

   Návod: využijte větu dokázanou v předchozím bodě.