Markovské řetězce - II

Příklady:

1. Mějme $k \in \mathbb{N}$ přihrádek a neomezenou zásobu kuliček. V každém kroku vybereme náhodně rovnoměrně jednu z přihrádek a do ní vložíme kuličku. Nechť X_n značí počet obsazených přihrádek na konci n-tého kroku. Ukažte, že $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je homogenní markovský řetězec, určete jeho matici pravděpodobností přechodu a $p_{i,i}^{(n)}$ a s jejich pomocí klasifikujte stavy.

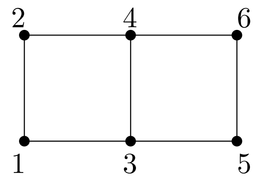
2. **(teoretická analýza DÚ2, a) neboli ruinování hráče)**
Aleš a Barbora hrají v kostky (každý vyhraje danou partii s pravděpodobností $\frac{1}{2}$) a začínají oba s pěti mincemi. V každé partii ten, kdo prohraje, dá svému soupeři jednu minci. Buď X_n počet mincí, které vlastní Aleš v čase n, $n \in \mathbb{N}$. Pokud je jeden hráč ruinován, stav X_n zůstane zafixován a už se pro další n nemění. Buď $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ náš markovský řetězec, přičemž pokládáme $X_0 = 5$.
a) Určete matici pravděpodobností přechodu markovského řetězce $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
b) Klasifikujte stavy řetězce.
c) Určete pravděpodobnosti absorpce.
d) Co se dá teoreticky říci o chování $\mathbf{p}(n)$ pro $n \to \infty$?

3. Nechť homogenní markovský řetězec má matici pravděpodobností přechodu
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$
a) Předpokládejme, že počáteční rozdělení řetězce bylo rovnoměrné. Jaké je rozdělení v čase $n = 3$?
b) Klasifikujte stavy řetězce.
c) Určete stacionární rozdělení (pokud existuje).
d) Určete limitní rozdělení (pokud existuje).

4. Nechť homogenní markovský řetězec má matici pravděpodobností přechodu
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$
a) Spočtěte matici pravděpodobností přechodu po dvou krocích $\mathbf{P}^{(2)}$.
b) Předpokládejme, že počáteční rozdělení je rovnoměrné. Jaké je rozdělení v čase $n = 2$?
c) Předpokládejme, že počáteční rozdělení $p = (1, 0, 0, 0)$. Jaké je rozdělení v čase $n = 2$?
d) Klasifikujte stavy řetězce.
e) Určete stacionární rozdělení (pokud existuje).
f) Určete limitní rozdělení (pokud existuje).
g) Určete pravděpodobnosti absorpce.

5. Nechť homogenní markovský řetězec má matici pravděpodobností přechodu
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$
a) Klasifikujte stavy řetězce.
b) Určete stacionární rozdělení (pokud existuje).
c) Určete limitní rozdělení (pokud existuje).

6. Nechť homogenní markovský řetězec má matici pravděpodobností přechodu
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$
a) Klasifikujte stavy řetězce.
b) Určete stacionární rozdělení (pokud existuje).
c) Určete limitní rozdělení (pokud existuje).

7. Uvažujme objekt, který se pohybuje po plánu znázorněném na obrázku. Pohyby jsou pouze mezi šesti význačnými body. V každém kroku si objekt vybere jeden ze čtyř směrů (sever, východ, jih, západ – každý se stejnou pravděpodobností) a tímto směrem se vydá. Určeným směrem se pohybuje tak dlouho, dokud je to možné (pokud v daném směru nevede cesta, zůstává na místě). Označme X_n polohu objektu po n krocích.


a) Určete matici pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$ markovského řetězce $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
b) Určete rozdělení řetězce v časech $n = 1, 2, 3, 4$, pokud $X_0 = 1$.
c) Určete rozdělení řetězce v časech $n = 1, 2$, pokud $X_0 = 3$.
d) Klasifikujte stavy řetězce.
e) Určete pravděpodobnosti absorpce.
f) Určete limitní rozdělení (pokud existuje).

8. **(teoretická analýza DÚ2, b) neboli náhodná procházka na $\mathbb{N}_0$)**
Aleš a Barbora hrají sérii šachových zápasů. Předpokládejme, že každá partie skončí s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ výhrou Aleše, s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ remízou, a s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ výhrou Barbory. Za výhru se získává jeden bod, za remízu půl bodu. Označme X_n absolutní hodnotu rozdílu získaných bodů obou hráčů po n partiích.
a) Určete matici pravděpodobností přechodu markovského řetězce $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
b) Klasifikujte stavy řetězce.
c) Existuje stacionární rozdělení řetězce?
d) Co se dá říci o chování řetězce pro $n \to \infty$?

9. **(symetrická náhodná procházka na $\mathbb{Z}$)**
Uvažujme $\{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny s diskrétním rovnoměrným rozdělením na $\{-1, 1\}$ a definujme posloupnost $X_0 = 0$ a $X_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, pro $n \in \mathbb{N}$. Ukažte, že je $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ homogenní markovský řetězec, určete jeho pravděpodobnosti přechodu a pomocí vyjádření $p_{j,j}^{(n)}$ a Stirlingovy formule klasifikujte stavy.
Co jste se dozvěděli o limitním chování tohoto procesu?

10. **(náhodná procházka s odrážecí bariérou)**
Leze slimák po nekonečně vysokém stromě, za každou hodinu s pravděpodobností $\frac{1}{4}$ vyleze nahoru o jeden centimetr a s pravděpodobností $\frac{3}{4}$ o jeden centimetr dolů sklouzne. Pokud je na zemi, popoleze o jeden centimetr nahoru s pravděpodobností 1. Označme X_n výšku (v centimetrech), ve které se slimák nachází po n hodinách.
a) Určete matici pravděpodobností přechodu markovského řetězce $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
b) Klasifikujte stavy řetězce.
c) Předpokládejte, že na počátku je slimák na zemi, a spočtěte absolutní pravděpodobnosti po třech hodinách
d) Spočtěte stacionární rozdělení (pokud existuje).