Markovské řetězce - I

Příklady:

1. Ukažte, že každá posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin, které nabývají jen spočetně mnoha hodnot, je homogenní Markovský řetězec. Jaká je jeho matice pravděpodobností přechodu?

2. Mějme $k \in \mathsf{N}$ přihrádek a neomezenou zásobu kuliček. V každém kroku vybereme náhodně rovnoměrně jednu z přihrádek a do ní vložíme kuličku. Nechť X_n značí počet obsazených přihrádek na konci n-tého kroku. Ukažte, že $\{X_n\}_{n\in\mathsf{N}}$ je homogenní markovský řetězec, určete jeho matici pravděpodobností přechodu a $p_{i,i}^{(n)}$ a s jejich pomocí klasifikujte stavy.

3. (Průběžné maximum) Uvažujme $\xi_1, \xi_2, \ldots$ nezávislé stejně rozdělené celočíselné náhodné veličiny a definujme posloupnost $X_n = \max_{1\le i\le n} \xi_i$. Pak je $\{X_n\}_{n\in\mathsf{N}}$ homogenní markovský řetězec — dokažte.
   Pro případ, kdy ξ_i má rovnoměrné rozdělení na množině $\{-1, 0, 1\}$, určete matici pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$ a pomocí $\mathbf{P}^n$ klasifikujte jeho stavy.

4. Aleš a Barbora hrají sérii šachových zápasů. Předpokládejme, že každá partie skončí s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ výhrou Aleše, s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ remízou, a s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ výhrou Barbory. Za výhru se získává jeden bod, za remízu půl bodu. Označme X_n absolutní hodnotu rozdílu získaných bodů obou hráčů po n partiích.
   Určete matici pravděpodobností přechodu markovského řetězce $\{X_n\}_{n\in\mathsf{N}}$.

5. (Simulování markovského řetězce) Máme dáno počáteční rozdělení $(p_i)_{i\in S}$ a matici pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$ markovského řetězce $\{X_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ a chceme simulovat náhodnou realizaci tohoto řetězce $\{X_n\}$. K tomu máme ještě k dispozici posloupnost náhodných čísel $U_0, U_1, U_2, \ldots$, které jsou nezávislé, stejně rozdělené a mají rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0, 1]$. Jedna možnost postupu je takováto:

   Zadefinujeme si (nenáhodné) zobrazení $\Psi : [0, 1] \to S$ tak, aby pro každý stav $i \in S$ platilo
   $$\int_0^1 I(\Psi(x) = i)dx = p_i,$$
   a zobrazení $\Phi : S \times [0, 1] \to S$ tak, aby platilo
   $$\int_0^1 I(\Phi(i, x) = j)dx = p_{ij},$$
   pro každou dvojici stavů $i, j \in S$. Potom definujeme naši náhodnou realizaci řetězce $\{X_n\}$. takto:
   $$X_0 = \Psi(U_0), \qquad X_{n+1} = \Phi(X_n, U_n) \text{ pro } n \ge 1.$$
   a) Ukažte, že takto generovaný řetězec $\{X_n\}$ má skutečně požadované rozdělení.
   b) Navrhněte vhodné funkce Ψ a Φ.