12. Diferenční rovnice

Definice. Nechť $k \in \mathbf{N}$. **Lineární diferenční rovnicí k-tého řádu s konstantními koeficienty** budeme rozumět rovnici

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \cdots + p_k y(n) = a_n, \qquad n \in \mathbf{N}, \qquad (1)$$

kde neznámou je posloupnost $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$, přičemž $p_1, \ldots, p_k \in \mathbf{R}$, $p_k \neq 0$ jsou dána, stejně jako posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Řešením rovnice (1) rozumíme každou posloupnost $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$ splňující (1) pro každé $n \in \mathbf{N}$. Pokud chceme, aby řešení rovnice (1) splňovalo podmínky

$$y(1) = y_1, \ldots, y(k) = y_k, \qquad (2)$$

kde $y_1, \ldots, y_k$ jsou dána (tzv. **počáteční podmínky**), pak hovoříme o **počáteční úloze.**

Pokud $a_n = 0$ pro každé $n \in \mathbf{N}$, pak (1) má tvar

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \cdots + p_k y(n) = 0, \qquad n \in \mathbf{N}. \qquad (3)$$

Tato rovnice se nazývá **homogenní.**

Věta 1. *Počáteční úloha (1), (2) má právě jedno řešení.*

Věta 2. *Množina řešení rovnice (3) tvoří vektorový podprostor dimenze k prostoru všech reálných posloupností.*

Definice. **Charakteristickým polynomem** rovnice (1) budeme rozumět polynom

$$\lambda \mapsto \lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \cdots + p_{k-1}\lambda + p_k.$$

Věta 3. *Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ jsou všechny navzájem různé reálné kořeny charakteristického polynomu rovnice (1) s násobnostmi $r_1, \ldots, r_s$. Nechť $\xi_1, \ldots, \xi_l$ jsou všechny navzájem různé komplexní kořeny charakteristického polynomu rovnice (1) s kladnou imaginární částí a násobnostmi $q_1, \ldots, q_l$, přičemž pro $j = 1, \ldots, l$ platí $\xi_j = \mu_j(\cos \nu_j + i \sin \nu_j)$. Pak následující posloupnosti tvoří bázi prostoru řešení (3).*

$$\begin{array}{cccc}
\{\lambda_1^n\}, & \{n\lambda_1^n\}, & \ldots & \{n^{r_1-1}\lambda_1^n\}, \\
\vdots & & & \\
\{\lambda_s^n\}, & \{n\lambda_s^n\}, & \ldots & \{n^{r_s-1}\lambda_s^n\}, \\
\{\mu_1^n \cos \nu_1 n\}, & \{n\mu_1^n \cos \nu_1 n\}, & \ldots & \{n^{q_1-1}\mu_1^n \cos \nu_1 n\}, \\
\{\mu_1^n \sin \nu_1 n\}, & \{n\mu_1^n \sin \nu_1 n\}, & \ldots & \{n^{q_1-1}\mu_1^n \sin \nu_1 n\}, \\
\vdots & & & \\
\{\mu_l^n \cos \nu_l n\}, & \{n\mu_l^n \cos \nu_l n\}, & \ldots & \{n^{q_l-1}\mu_l^n \cos \nu_l n\}, \\
\{\mu_l^n \sin \nu_l n\}, & \{n\mu_l^n \sin \nu_l n\}, & \ldots & \{n^{q_l-1}\mu_l^n \sin \nu_l n\}
\end{array}$$

Věta 4. *Nechť posloupnosti $\{y^1(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y^2(n)\}_{n=1}^{\infty}$, ... , $\{y^k(n)\}_{n=1}^{\infty}$ tvoří fundamentální systém řešení (3). Nechť posloupnost $\{z(n)\}_{n=1}^{\infty}$ je řešením (1). Potom posloupnost $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$ řeší (1) právě když existují konstanty $c_1, \ldots, c_k \in \mathbf{R}$ takové, že*

$$y(n) = z(n) + c_1 y^1(n) + \cdots + c_k y^k(n)$$

pro každé $n \in \mathbf{N}$.

Věta 5. *Nechť posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ v rovnici (1) splňuje*

$$a_n = \alpha^n (P(n)\cos(\nu n) + Q(n)\sin(\nu n)),$$

kde $\alpha > 0$, P, Q jsou polynomy. Pak existuje řešení (1) ve tvaru

$$y(n) = \alpha^n n^m (R(n)\cos(\nu n) + S(n)\sin(\nu n)),$$

kde R, S jsou vhodné polynomy stupně ne většího než $\max\{$*stupeň P, stupeň Q*$\}$ *a $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ udává jakou násobnost má číslo $\alpha(\cos \nu + i \sin \nu)$ jakožto kořen charakteristického polynomu rovnice (1).*