Řešení homogenních lineárních diferenčních rovnic

Homogenní lineární diferenční rovnicí k-tého řádu nazveme rovnici

$$a_n + c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k} = 0, \qquad n \geq k, \tag{1}$$

kde c_i jsou dané koeficienty a $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost, kterou hledáme.

Rovnici

$$\lambda^k + c_1 \lambda^{k-1} + \cdots + c_{k-1}\lambda + c_k = 0, \tag{2}$$

nazveme **charakteristickou rovnicí** homogenní lineární diferenční rovnice (1).

Jestliže je číslo λ r-násobným kořenem rovnice (2), pak posloupnosti $\{\lambda^n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{n\lambda^n\}_{n=0}^{\infty}$, $\ldots$, $\{n^{r-1}\lambda^n\}_{n=0}^{\infty}$ jsou lineárně nezávislá řešení homogenní lineární diferenční rovnice (1). Každé řešení homogenní lineární diferenční rovnice (1) je pak kombinací těchto řešení.
Z k počátečních podmínek $a_l = const_l$, $l \in \{1, \ldots k\}$ pak můžeme určit jednoznačné řešení.

Příklad 1: Řešte soustavy diferenčních rovnic:

a)

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \\ a_1 &= \tfrac{4}{3} \\ a_k - \tfrac{4}{3}a_{k-1} + \tfrac{1}{3}a_{k-2} &= 0, \qquad k \geq 2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 3 \\ a_k - 2a_{k-1} + a_{k-2} &= 0, \qquad k \geq 2 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} a_0 &= 3 \\ a_1 &= \tfrac{5}{3} \\ a_k - 4a_{k-1} + 3a_{k-2} &= 0, \qquad k \geq 2 \end{aligned}$$