Domácí úloha č.4
simulování hard-core modelu na mříži pomocí MCMC

(odevzdání do **Vánoc**)

Uvažujme graf $G = (V, E)$ takový, že $|V| < \infty$. Vrcholy grafu mohou mít buď bílou nebo červenou barvu, a to tak, že žádné dva vrcholy, které spolu sousedí (tj. mezi kterými vede hrana), nemají oba stejnou červenou barvu.

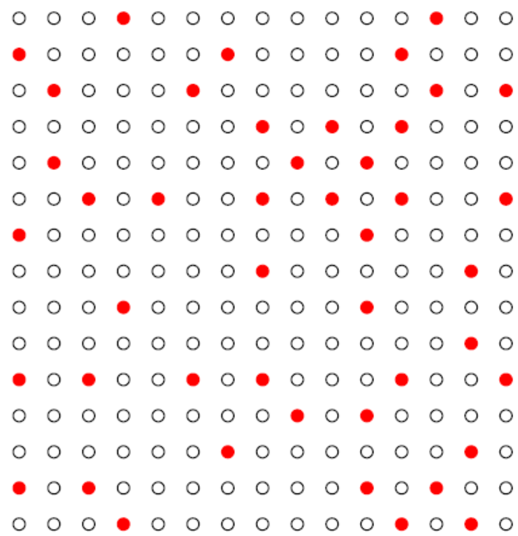
Definice: *Uvažujme prostor všech možných konfigurací $\{0,1\}^V$. Řekneme, že konfigurace $\xi \in \{0,1\}^V$ je přípustná, jestliže pro žádné dva $u, v \in V$ takové, že $\{u, v\} \in E$, není $\xi(u) = \xi(v) = 1$. Zde hodnota 0 reprezentuje bílou barvu a hodnota 1 barvu červenou.*

Označme N_G počet všech přípustných konfigurací na grafu G a buď $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ pravděpodobnostní prostor. Nechť je $\xi : \Omega \to \{0,1\}^V$ náhodná veličina s rozdělením

$$\mathbb{P}(\xi = \tilde{\xi}) = \begin{cases} \frac{1}{N_G}, & \tilde{\xi} \text{ je přípustná,} \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Naším cílem je počítačově generovat náhodnou veličinu ξ z tohoto rozdělení. K tomu lze použít random scan Gibbs sampler, jak ho známe z přednášky.

Uvažujme nyní zcela konkrétní graf G. Bude se jednat o mříž $N \times N$, kde každý vrchol spojíme hranou s jeho čtyřmi nejbližšími sousedy (body na okraji s méně). Jedna z náhodně rovnoměrně zvolených konfigurací je např. na obrázku 1.



Obrázek 1: Náhodná realizace hard-core modelu na mříži 15 × 15

Úkol: Formulujte random scan Gibbs sampler pro generování z rozdělení náhodné veličiny ξ.
Generujte náhodnou přípustnou realizaci na mříži $N \times N$.
Dále na základě dostatečného počtu simulací odhadněte střední počet červených bodů v náhodné přípustné realizaci hard-core modelu na mříži $N \times N$.