Domácí úloha č.2 — simulování markovského řetězce

(odevzdání do **22.11. 16:00**)

a) Aleš a Barbora hrají v kostky (každý vyhraje danou partii s pravděpodobností $\frac{1}{2}$) a začínají oba s pěti mincemi. V každé partii ten, kdo prohraje, dá svému soupeři jednu minci. Buď X_n počet mincí, které vlastní Aleš v čase n, $n \in \mathbf{N}$. Pokud je jeden hráč ruinován, stav X_n zůstane zafixován a už se pro další n nemění. Buď $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ náš markovský řetězec, přičemž pokládáme $X_0 = 5$.

Simulujte několik průběhů markovského řetězce $\{X_n\}$ (např. 20). Nakreslete graf se všemi průběhy a graf, který ukáže, jak se vyvíjejí četnosti

$$\hat{p}_i(t) = (\text{počet realizací řetězce ve stavu i v čase t})/(\text{počet všech simulovaných realizací}),$$

například pro časy $t = 0, 5, 10, 25, 50, 100$.

Spočtěte také, jaké jsou teoretické absolutní pravděpodobnosti $\mathbf{p}(t)$ (k tomu budete samozřejmě potřebovat určit počáteční rozdělení $\mathbf{p}(0)$ a matici pravděpodobností přechodu P - a použít software, který umí násobit matice).

b) Simulujte markovský řetězec z příkladu o hraní šachu.

Nasimulujte několik trajektorií (řekněme 20) délky 200, vycházející z počátečního stavu 0 a stejný počet vycházející z počátečního stavu 10.

Vytvořte grafy s průběhem těchto trajektorií a spočtěte relativní četnosti jednotlivých stavů (tj. počet časových okamžiků, v nichž byl řetězec ve stavu $i \in S$ dělený délkou pozorovaného řetězce - !pozor! význam těchto četností je jiný než v případě a). Jak moc se tyto pozorované četnosti liší pro jednotlivé průběhy?

Jak se změní situace, když bude Aleš vyhrávat s pravděpodobností 0.5, remíza nastane s pstí 0.25 a Barbora vyhraje s pravděpodobností 0.25?

Nakreslete graf průběhů všech trajektorií a graf s relativními četnostmi.

Řešení by v obou případech a) i b) mělo obsahovat popis, jak jste realizace řetězce generovali.