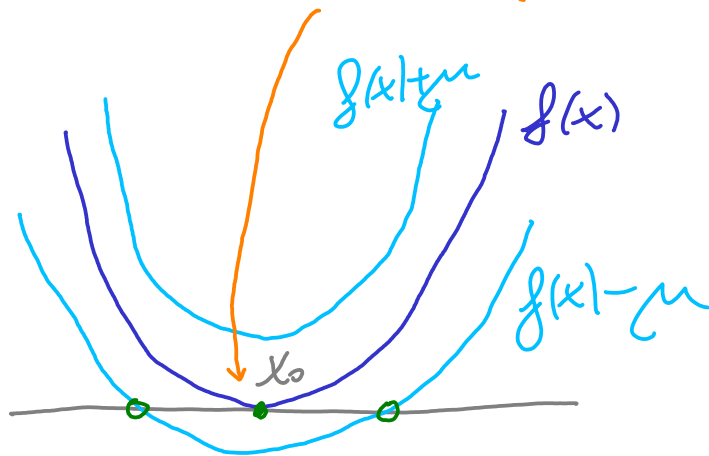
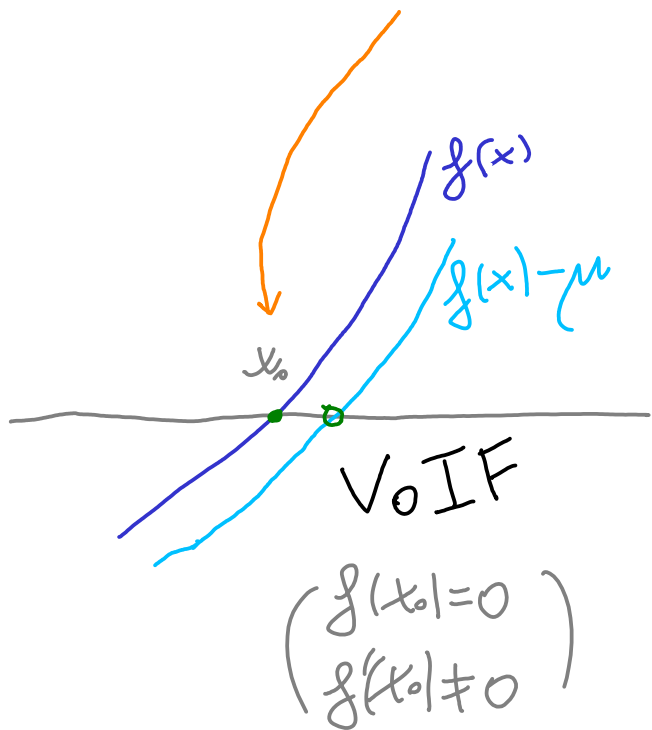


19. Bifurkace

Motivace. regulární bod vs. bod bifurkace



$$\begin{pmatrix} f(x_0) = f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{pmatrix}$$

Def. Je dána rce (1) $x' = f(x, \mu)$, $x \in \mathbb{R}^n$
 $\in \mathbb{R}^{n+1}$ $\left(\begin{smallmatrix} \uparrow \\ C^1 \end{smallmatrix} \right)$ $\mu \in \mathbb{R}$ bif. param.

Bod (x_0, μ_0) nazýváme regulární $\Leftrightarrow \exists \delta > 0$ s.ž.

Bod (x_0, μ_0) nazýváme hodem bifurkace



není regulární

$$\forall |\mu - \mu_0| < \delta$$

žije d.s. rce (1)

topologicky konjugované
 ve $\mathcal{U}(x_0, \delta)$

Pozn. topologicky konjugované $\Leftrightarrow$ stejné až na možnou deformaci
(X.13)

Pozn. ① $f(x_0, \mu_0) \neq 0 \Rightarrow (x_0, \mu_0)$ regulární

V.13.3 (o rektifikaci)

$\Downarrow$ lok. konj. $\circ$ $y' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

② $f(x_0, \mu_0) = 0$, leč $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ $\mu_0 \nexists \lambda \in \sigma(A)$,
"hyperbolický sec. bod" $A_0 = D_x f(x_0, \mu_0)$

$\Rightarrow (x_0, \mu_0)$ regulární

dk. (i) existují V, IF ne $\boxed{f(x, \mu) = 0}$ blízko (x_0, μ_0)
 $D_x f(x_0, \mu_0)$ regulární $\Updownarrow$

$\angle x = \hat{x}(\mu) \in \mathbb{C}^1$

$\Rightarrow \mu$ blízko μ_0 : $\exists!$ sec. bod,

mátnice lineární

$A_\mu = D_x f(\hat{x}(\mu), \mu)$
blízké A_0

(ii) Věta 13.4. (Hartmann-Grobman)

$$(1)_{\mu} \text{ roz. kraj. } y' = A_{\mu} y \\ (\text{blízko } \hat{x}(\mu))$$

(iii) $y' = A_{\mu} y$ roz. kraj. $\circ$ $y' = A_0 y$

Lemma. (1) $x' = f(x, \mu)$ $f \in C^1$

$\Rightarrow$ nutné podmínky bifurkace

$$f(x_0, \mu_0) = 0$$

$$\sigma(D_x f(x_0, \mu_0)) \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$$

tz: sekcionární, nehybnostický
bod.

Lemme 19.1. [O vydělení.]

Necht' $h(x, \lambda) \in C^{(2-1)}$, necht' $h(0, \lambda) = 0$ blízko $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

Pak $\exists H(x, \lambda) \in C^{2-1}$ s.ž. $h(x, \lambda) = x H(x, \lambda)$, "-.

nově platí: $H(0, 0) = \partial_x h(0, 0)$ ✓

$$\partial_x H(0, 0) = \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 h(0, 0) \quad \checkmark$$

$$\partial_{\lambda} H(0, 0) = \partial_{x\lambda}^2 h(0, 0), \quad \partial_{xx}^2 H(0, 0) = \frac{1}{3} \partial_{xxx}^3 h(0, 0).$$

22. TRIK: $H(x, \lambda) := \int_0^1 (\partial_x h)(x\sigma, \lambda) d\sigma$

ověření: $x H(x, \lambda) = \int_0^1 \underbrace{x \partial_x h(x\sigma, \lambda)}_{\parallel \frac{d}{d\sigma} h(x\sigma, \lambda)} d\sigma = \left[h(x\sigma, \lambda) \right]_{\sigma=0}^{\sigma=1}$

$$\frac{d}{d\sigma} h(x\sigma, \lambda) = \underbrace{h(x, \lambda)}_{= h(0, \lambda)}$$

$H(x, \lambda) \in C^0 \Leftarrow$ spojitě definovaná
integrál má λ
(konstantní majoranta)

zvěřky: $H(0, 0) = \int_0^1 \partial_x h(0, 0) d\sigma = \partial_x h(0, 0).$

$$\partial_x H(x, \lambda) = \int_0^1 \partial_{xx}^2 h(x\sigma, \lambda) \sigma d\sigma$$

$$\partial_x H(0, 0) = \int_0^1 \underbrace{\partial_{xx}^2 h(0, 0)}_{\parallel \frac{1}{2}} \sigma d\sigma = \partial_{xx}^2 h(0, 0) \cdot \underbrace{\int_0^1 \sigma d\sigma}_{\parallel \frac{1}{2}}$$

Pozn. ① Taylorova řada

② platí dokonce pro $h(x, \lambda): X \times \mathbb{R} \rightarrow X$

Bochner

□

opozij.

bifurkace
 regulární bod
 (smluvně)

stabilise v ODR: metac. bod.
 nec. hyperc. bod

- plán:
- 1) bifurkace v 1d
 - 2) abstraktní bifurkace
 - 3) Hopf v 2d

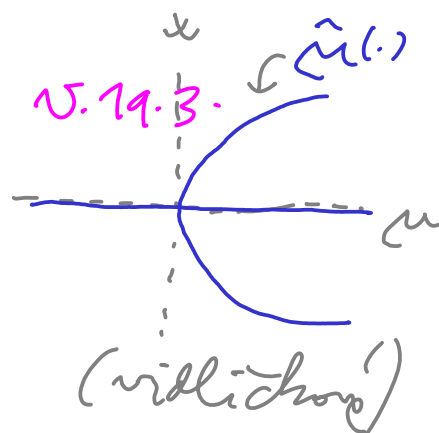
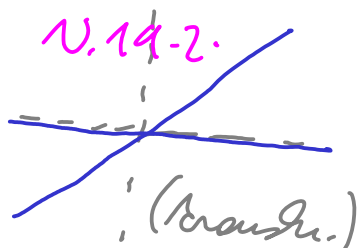
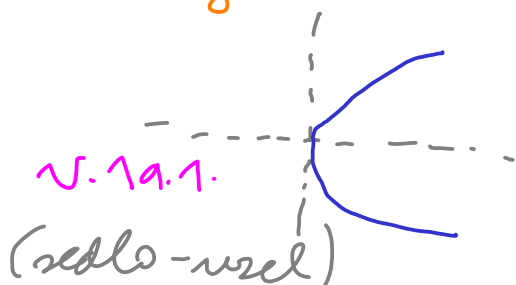
Vešy 19.1-2-3: [souhrn.]

máme u $x' = f(x, \mu)$ v bodě $(0,0) \in \mathbb{R}^2$
 $f \in C^q, q \geq 2$

	f	$\partial_x f$	$\partial_\mu f$	$\partial_{xx} f$	$\partial_{x\mu} f$	$\partial_{xxx} f$	
V.19.1	$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\times$	$\times$	} bodu. ~ (0,0)
V.19.2	$= 0$	$= 0$	$\equiv 0^*)$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\times$	
V.19.3	$= 0$	$= 0$	$\equiv 0^*)$	$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	

nutné
 podm.
 bif.

$*) f(0, \mu) \equiv 0$
 blíž 0



Úloha 19.3 (Nidličková l.j. ~ 1a).

nechť $f(x, \mu) \in C^3$ neobsahuje $(0,0) \in \mathbb{R}^2$

$$f(0,0) = 0, \quad \partial_x f(0,0) = 0$$

$$(*) \quad f(0,\mu) = 0 \quad \forall \mu \text{ blízké } 0$$

$$\partial_{xx} f(0,0) = 0$$

nechť $\boxed{\partial_{x\mu}^2 f(0,0) \neq 0, \quad \partial_{xxx}^3 f(0,0) \neq 0.}$

Pakže uče $x' = f(x, \mu)$ má v bodě $(0,0)$ nidličkovou bifurkaci.

DŮ. uvažuj $f(x, \mu) = 0$ (uče v okolí $(0,0)$)

$$\underline{\text{L. 19.1.}} \quad (*) \Rightarrow f(x, \mu) = x F(x, \mu), \quad F \in C^2$$

$$\text{nechť: } \boxed{\begin{aligned} F(0,0) &= \partial_x f(0,0) = 0 \\ \partial_\mu F(0,0) &= \partial_{x\mu} f(0,0) \neq 0 \end{aligned}}$$

$$\Downarrow \text{ dle V. I. F}$$

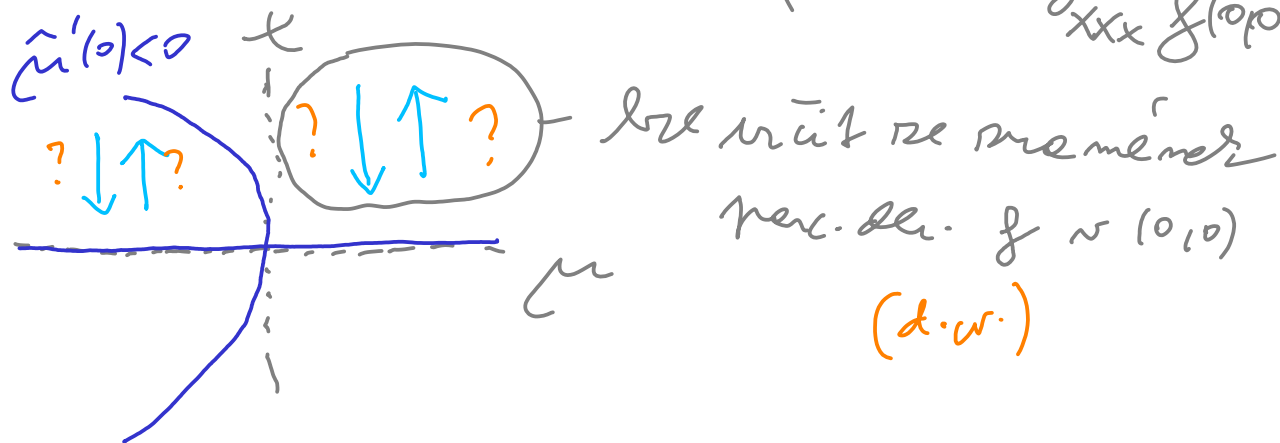
$$F(x, \mu) = 0 \Leftrightarrow \mu = \tilde{\mu}(x)$$

pro $\mu \in C^2, \mu(0) = 0$

dále spočítáme:
$$(*) \begin{cases} \hat{\mu}'(0) = \frac{-\partial_x F(0,0)}{\partial_\mu F(0,0)} \stackrel{\text{L. 19.7}}{=} \frac{-\frac{1}{2} \partial_{xx} f(0,0)}{\partial_{x\mu} f(0,0)} \\ \hat{\mu}''(0) = \frac{\partial_{xx} F(0,0)}{\partial_\mu F(0,0)} = \frac{\frac{1}{3} \partial_{xxx} f(0,0)}{\partial_{x\mu}^2 f(0,0)} \end{cases}$$

(dále: $F(x, \hat{\mu}(x)) = 0 \quad \forall x \text{ blízko } 0$
 $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ a podobně $x=0, \hat{\mu}(0)=0$)

(*) máme: $\hat{\mu}'(0) = 0$ (neboť $\partial_{xx} f(0,0) = 0$)
 $\hat{\mu}''(0) \neq 0$ (" — $\partial_{xxx} f(0,0) \neq 0$)

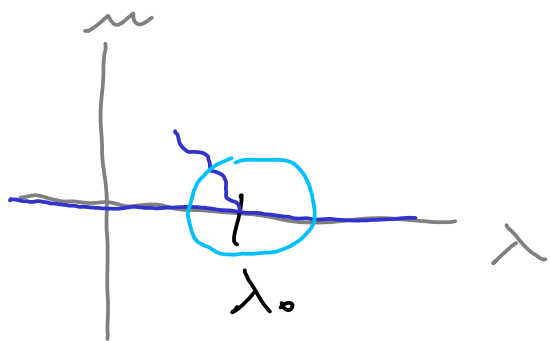


Posuzování a abstraktně liftnostně

Nechť $F(\mu, x): X \times \mathbb{R} \rightarrow Y$, kde X, Y
 $\uparrow$ lif. paramet. jsou Banachovy pr.

nechť $F(0, \lambda) = 0$, $\lambda_0 \neq \lambda$

Bod $(0, \lambda_0)$ nazýváme bodem bifurkace, jestliže
každé jeho okolí obsahuje nekonečně
(∞ $\mu \neq 0$) řešení rovnice $F(\mu, \lambda) = 0$.



nelineární 91. Li.

Příklad

$$\mu'' + \lambda(\mu + \mu^3) = 0 \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\left[\begin{array}{l} \mu(0) = \mu(2\pi) \\ \mu'(0) = \mu'(2\pi) \end{array} \right] \quad (2.14)$$



($\mu \equiv 0$ řešení)

$$F(\mu, \lambda) = 0, \text{ kde}$$

$$F: (\mu, \lambda) \mapsto \mu'' + \lambda(\mu + \mu^3)$$

$$C_{\text{per}}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow C_{\text{per}}$$

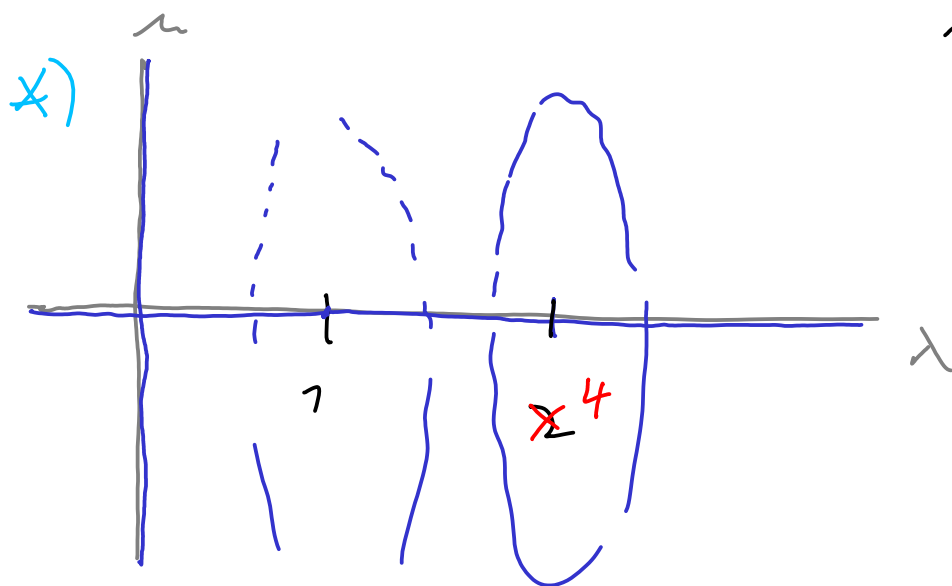
lineární

$$L_\lambda = D_\mu F(\cdot, \lambda) \Big|_{\mu=0}$$

$$L_\lambda: u \mapsto u'' + \lambda u$$

? *lineárně* $\Leftrightarrow$ nesiv. řešení $\sim$ *okružní*

$$u \equiv 0$$



nulové *podm.*: L_λ není izomorfismus
($\Leftarrow$ $\forall \text{IF}$)



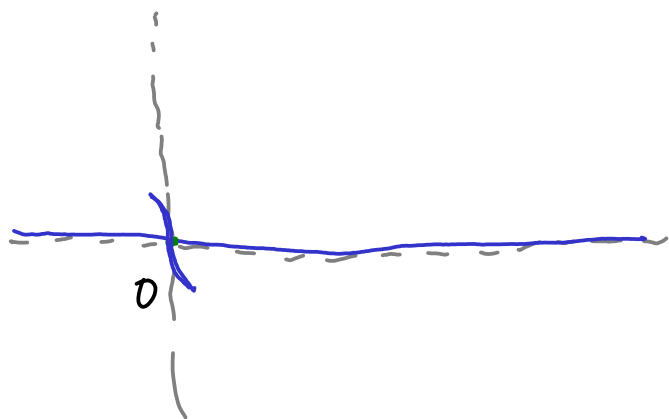
homog. n. l. b. h.

$\boxed{u'' + \lambda u = 0}^*) \quad t \in (0, 2\pi)$

? $\exists$ nesiv. řešení
($\sim$ *zer. okruž. podm.*)

$$\lambda = 0 : u \equiv c_0$$

$$\lambda = \varrho^2 ; u = c_1 \cos \varrho t + c_2 \sin \varrho t$$



úroveň re

$$\mu'' + \lambda(\mu + \mu^3) = 0$$

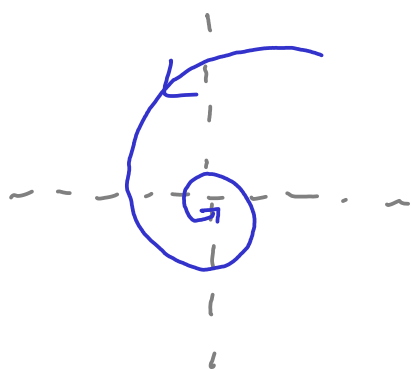
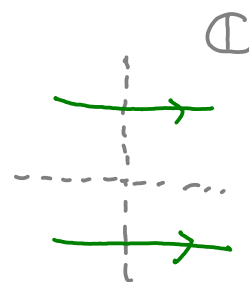
(+ zhr. dr. h)

Matematická úroveň (ad Hopfova lif.)

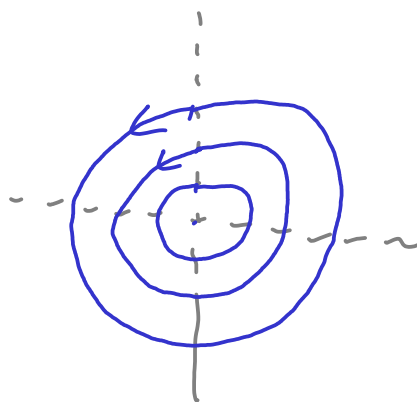
$$\begin{aligned} x' &= \mu x - y \\ y' &= x + \mu y \end{aligned}$$

$$A_\mu = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$$

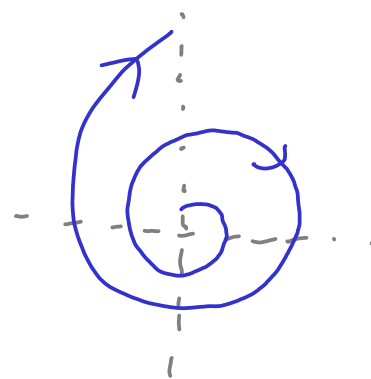
$$\sigma(A_\mu) = \underline{\mu} \pm i$$



$$\mu < 0$$



$$\boxed{\mu = 0}$$



$$\mu > 0$$

Věta 19.4 [Hopfova lif. ve 2d]

Uvažujme systém $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A_\mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x, y, \mu) \\ g(x, y, \mu) \end{pmatrix}$

$\sim$ obdrží $(x, y, \mu) = (0, 0, 0)$. Nechť f, g jsou C^2 ,
 nechť $f = g = 0$ a sčít $\nabla_{x,y} f = \nabla_{x,y} g = 0$,
 $\sim (0, 0, \mu)$, pro $\forall \mu$.

nechť $A_\mu \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ řešíme hledce na μ ,

nechť $\sigma(A_\mu) = \{\alpha(\mu) \pm i\omega(\mu)\}$,

kte $\boxed{\alpha(0) = 0, \alpha'(0) \neq 0, \omega(0) \neq 0.}^{*)}$

Potom: $\exists \delta > 0$ a.ž. $\forall a \in (0, \delta)$

$\exists$ nekiv. žn. řešení, proče řešení
 bodem $(a, 0) \in \mathbb{R}^2$.

D9..:

strategie: 1) polemi souř: $2d \rightarrow 1d$
 2) Poincarého zob. $\Rightarrow$ bifurkace!
 3) L. 19.1. & VoIF ^{ne}

BUNO:

$A_\mu = \begin{pmatrix} \alpha(\mu) & -\omega(\mu) \\ \omega(\mu) & \alpha(\mu) \end{pmatrix}$... řešení souřadnic
 (hlavně u μ)

polemi

$x(t) = r(t) \cos \theta(t)$

souř:

$y(t) = r(t) \sin \theta(t)$

... $r(t), \theta(t)$

nově nemejme

$$\left. \begin{aligned} r' &= \underbrace{\alpha(\mu)}_{\text{lin. cén}} r + \underbrace{R(r, \theta, \mu)}_{\text{nelin. noncén}} \\ \theta' &= \omega(\mu) + Q(r, \theta, \mu) \end{aligned} \right\}$$

idee: $R(r, \theta, \mu) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot \cos \theta + g(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot \sin \theta$

$$\underline{r} Q(r, \theta, \mu) = -f(\dots) \cdot \sin \theta + g(\dots) \cdot \cos \theta$$

note: $|f|, |g| = \mathcal{O}(x^2 + y^2) \quad (\forall \mu)$

$$\Rightarrow |R| = \mathcal{O}(r^2) \\ |Q| = \mathcal{O}(r)$$

*)

TRICK: note $\omega(0) \neq 0$, y:

$$|\omega(\mu)| > \frac{1}{2} |\omega(0)|$$

maic $|Q| \leq \frac{1}{4} |\omega(0)|$ bliska
početak

$$\Rightarrow |\theta'| > \frac{1}{4} |\omega(0)|, \text{ y. } t \mapsto \theta(t),$$

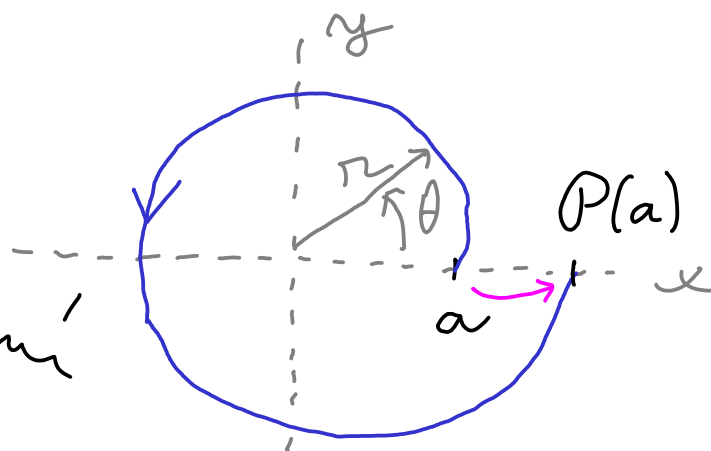
je monot

bre výjedi: $\boxed{r = r(\theta)}$ ↑ nová nezáv. proměnná

$$\boxed{\frac{dr}{d\theta} = \frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{r'}{\theta'} = \frac{\alpha(\mu)r + R(r, \theta, \mu)}{\omega(\mu) + Q(r, \theta, \mu)}}$$

idea: Poincarého
rozbíjení

pevný bod $\Leftrightarrow$ per. řešení



dělití úměrnosti

(*) $\boxed{\frac{dr}{d\theta} = \lambda(\mu)r + P(r, \theta, \mu)}$

hde: $\lambda(\mu) = \frac{\alpha(\mu)}{\omega(\mu)}, |P| \leq O(r^2)$

dz.: $\frac{\alpha r + R}{\omega + Q} = (\alpha r + R) \cdot \underbrace{\omega^{-1} (1 + \omega^{-1} Q)^{-1}}_{(*)}$

$$(1 + \omega^{-1} Q)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (\omega^{-1} Q)^j = 1 + O(Q)$$

$$= \frac{\lambda}{\omega} n + \frac{1}{\omega} \left(\underbrace{2n \Theta(Q)}_{O(n)} + R \underbrace{(1 + \Theta(Q))}_{O(n)} \right)$$

$$\therefore P = O(n^2)$$

odtud máme:

$$\left[\begin{array}{l} P(\theta, \theta, \mu) = 0 \\ \partial_n P(\theta, \theta, \mu) = 0 \end{array} \right]$$

hlívané.
pozorujeme

$(x(t), y(t))$
zer. řešení
mínusůce

$\Leftrightarrow$

$n|\theta|$ je
 2π -zer. řešení
ce (**)

hlfunkce: odvození:

$$\hat{n}(\theta) = \hat{n}(\theta, a, \mu) \dots \text{ řešení } (**)$$

$$\hat{n}'(\theta) - \lambda(\theta) \hat{n}(\theta) = P(\hat{n}(\theta), \theta, \mu)$$

i.f. $e^{-\lambda(\mu)\theta}$

$$\frac{d}{d\theta} \left(\hat{\pi}(\theta) e^{-\lambda(\mu)\theta} \right) = e^{-\lambda(\mu)} P(\dots)$$

$$\underbrace{\hat{\eta}(2\pi)}_a \cdot e^{-2\pi\lambda(\mu)} - \underbrace{\hat{\eta}(0)}_a = \int_0^{2\pi} e^{-\lambda(\mu)\theta} P(\hat{\eta}(\theta), \theta, \mu) d\theta$$



$$0 = a \cdot \left(1 - e^{-2\pi\lambda(\mu)} \right) + \int_0^{2\pi} e^{-\lambda(\mu)\theta} P(\dots) d\theta$$

"lifurðum ronne".

$$0 = h(a, \mu)$$

zkrác.: L. o vyřídění
a VOIF

$$h(0, \mu) = 0 \quad \text{z.} \quad h(a, \mu) = a + H(a, \mu)$$

side me: $H(0,0) = \partial_a h(0,0) = 0$

$$\left[\partial_{\mu} H(0,0) = \partial_{a_{\mu}} h(0,0) \neq 0 \right]$$

$$\text{d. } \partial_a h(a, \mu) = (1 - e^{-2\pi \lambda(\mu)}) + \left[\partial_a \int_0^{2\pi} \partial_{a_{\mu}} h(a, \mu) = 2\pi \cdot e^{-2\pi \lambda(\mu)} \cdot \lambda'(\mu) + \left[\partial_{a_{\mu}}^2 \int_0^{2\pi} \dots \right] \right]$$

$$\text{ford}^{\sim}(a, \mu) = (0,0): \quad \lambda(0) = \frac{\alpha(0)}{\omega(0)} = 0 \quad (**)$$

$$\lambda'(0) = \frac{\alpha'(0)}{\omega(0)} \neq 0$$

$$\partial_a h(0,0) = 1 - e^0 + \left[(\dots) \right] = 0$$

$$\partial_{a_{\mu}} h(0,0) = 2\pi \cdot e^0 \cdot \underbrace{\lambda'(0)}_{\neq 0} + \left[(\dots) \right] \neq 0$$

$$\underline{\text{ref.}}: = 0 \text{ for } a=0 \quad \left(\Rightarrow \hat{n} \equiv 0 \right)$$

$$P, \partial_a P = 0$$

$$V_0 I F \Rightarrow H(a, \mu) = 0 \Leftrightarrow \mu = \hat{\mu}(a) \quad \forall a \in (0, \delta) \quad \square$$