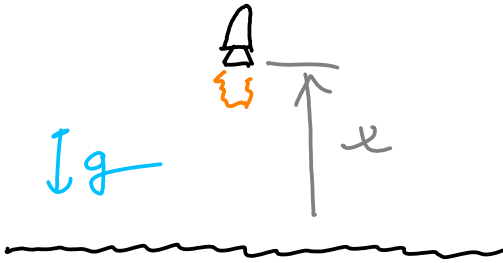


18. Optimalní regulace (řízení, "control")

Motivační příklady → moon landing problem



$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= -g + \frac{u}{m} \\ m' &= -k(u)\end{aligned}$$

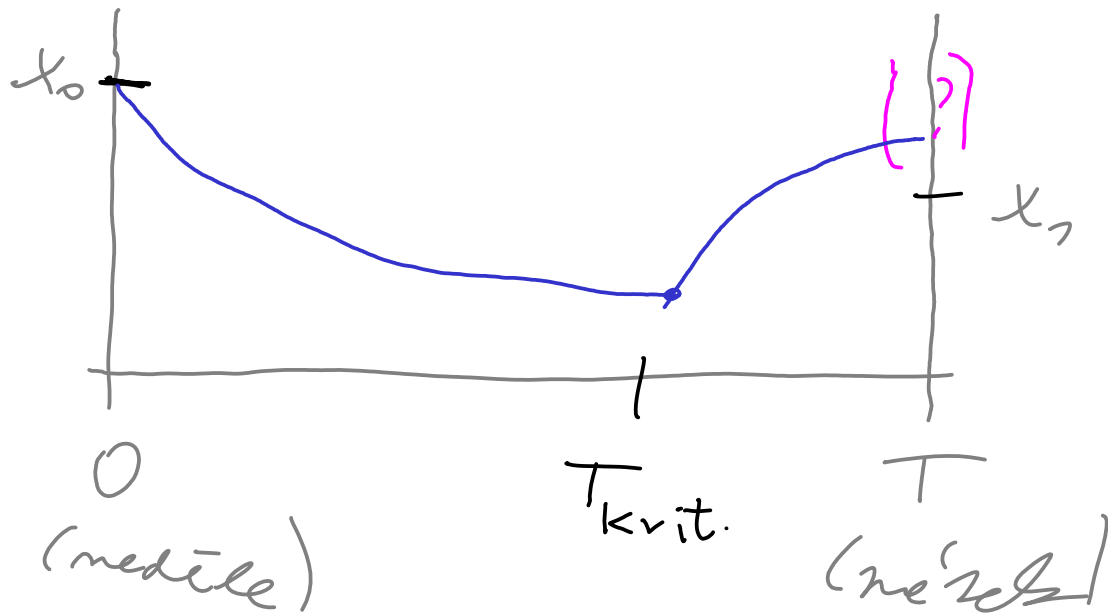
Řeš : $x = x(t) \dots$ výška
 $y(t) \dots$ rychlost
 $m(t) \dots$ hmotnost
 $u(t) \dots$ síla motoru
 $k \dots$ modely paliva

Problém: najdi $u(t): [0, T] \rightarrow [0, \pi]$
1.2. $\boxed{x(T) = 0}$ max.
 $x'(T) = 0$ sch

meří: $T > 0$ nejméně možný

(variance: $m(T)$ nejméně
možný)

2) problem characterization



$$x' = -\lambda x + u$$

$$x(0) = x_0$$

$x(t) \dots$ seřlato vřadnř
 $u(t) \dots$ přřdan řazenř

cil: najřt $u(t) : [0, T] \rightarrow [0, \Pi]$

$$\text{maximalizujř: } \underbrace{\beta(x(T) - x_1)}_{\sim \text{cřlovř seřlato}} - \underbrace{\int_0^T \alpha u(t) dt}_{\text{mřřřledy ne řazenř}}$$

Hybridř řazenř: $\exists T_{\text{krit}} \perp \cdot \vec{R}.$ $u \equiv 0 \quad t < T_{\text{krit}}$
 $u \equiv \Pi \quad t > T_{\text{krit}}$
 "princřp bang-bang"

Obecné optimalizační úlohy.

$$(1) \begin{aligned} x' &= f(x, u) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

$$u(t): [0, T] \rightarrow \overset{\mathbb{R}^m}{\mathcal{U}}$$

měřičské

$$x = x(t) \dots \text{stav}$$

$\mathcal{U} \dots$ přípustné
regulece

Cíl: max $P[u]$, kde
 $u \in \mathcal{U}$

$$P[u] = g(x(T)) + \int_0^T R(x(s), u(s)) ds$$

(funkcionál: $u(\cdot) \mapsto P[u]$)
 $\xrightarrow{(1)} x(\cdot)$

Variace 1) ? $\exists u \in \mathcal{U}$ a.ž. $x(T) = x_1$
(problem regulace, neuróni P)

2) $x(t)$ dáno, $T \geq 0$ zistovať
 $\max P(u)$ (Mayer)

3) $x(t)$ neurčené, $T > 0$ zistiť
 $\max P(u)$ (Bolza)

Transformácia

$$x_0 \xrightarrow[u(\cdot)]{t} x_1$$



$$x(t) = x_1, \text{ kde } x(t) \text{ je } \vec{x}(t)$$

pre dané $u(\cdot) \in \mathcal{U}$

Návrh: $u(\cdot)$ privedie $x(t)$ do x_1 za čas t
 a to do x_1 .

18.1 Lineárny riadenie

prípustné
 regulácie

$$(2) \begin{cases} x' = Ax + Bu \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$\mathcal{U} = L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)$$

stav
 systému

$$x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \text{ (} m < n \text{)}$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$B \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

Pozn.: $u(t) \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m) \Rightarrow \exists! x(t)$, azech

$$x(t) = e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} B u(s) ds$$

(var. konst.)

Def. $R(t) = \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n ; \exists u(\cdot) \in \mathcal{U} \text{ t. z. } \right.$
 $\left. x_0 \xrightarrow[u(\cdot)]{t} 0 \right\}$

klíčové pozorování:

$$x_0 \xrightarrow[u(\cdot)]{t} 0 \Leftrightarrow x_0 = - \int_0^t e^{-sA} B u(s) ds$$

dl.: v. z. : $0 = x(t)$

$$\Rightarrow \cancel{e^{tA}} x_0 = - \int_0^t \cancel{e^{tA}} \cancel{e^{-sA}} B u(s) ds$$

Úč 18.1. [Kelmenova věta.]

Orbita $R(t) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n; \exists u \in \mathcal{U}$

1.2. $x_0 \xrightarrow[u(1)]{t} 0,$

Paž $R(t) = \text{Lin} \{g_1, g_2, \dots, g_{m \times n}\},$

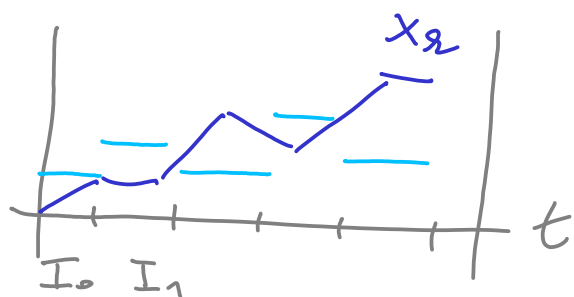
all g_i are source sw.

Kelmenov matrix ($n \times m \times n$)

$$K(A, B) = (B, AB, \dots, A^{n-1}B).$$

~~Def.~~ "heuristicko-matematický diskus"

"aproximace" (2)



$u \equiv \begin{pmatrix} u_2 \\ \text{no } I_2 \end{pmatrix}$ volim

$x_0 = 0$

$$\frac{x_{2+1} - x_2}{\tau} = Ax_2 + Bu_2$$

počítám

(BÚNO $\tau = 1$)

$\Rightarrow$

$$x_0 = 0$$

$$x_{k+1} = x_k + A x_k + B u_k$$

$x_k \in ??$

$$x_1 = x_0 + A x_0 + B u_0 = B u_0$$

$$x_2 = x_1 + A x_1 + B u_1$$

$$= B u_0 + A B u_0 + B u_1$$

$$= B (u_0 + u_1) + A B u_0$$

$$x_3 = x_2 + A x_2 + B u_2 = \dots$$

$$= B (u_0 + u_1 + u_2)$$

$$+ A B (2u_0 + u_1) + A^2 B u_0$$

$u_j \in \mathbb{R}^m$ je ľubovoľné

Prísl.

(2) je globálne regulovateľné ($\mathcal{R}(t) = \mathbb{R}^n$)

$\Leftrightarrow$ rank $\mathcal{K}(A, B) = n$.

Def.

Rel: (3) $x' = Ax$, ~~$(x|_0 = x_0)$~~ se nesve pozorovateľné skrze $y = Bx$, možno-li:

$x_1(t), x_2(t)$ řeší (3) a $Bx_1 \equiv Bx_2$ na $[0, \tau]$
 $\Rightarrow x_1 \equiv x_2$ na $[0, \tau]$. (pro $\tau > 0$)

18. II. Stabilizovatelnost

$$x' = f(x, u)$$

$$x(0) = x_0$$

? $\exists$ automatické regulace
 (řešivost)

$$F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ s.ř.}$$

$$x' = f(x, F(x)) \text{ splní}$$

$$x(t) \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$$

(nebo $x(t) = 0$ pro $t < +\infty$)
 -- jednoznačnost

Věta 18.4. Nechť $x' = Ax + Bu$ je globálně
 regulovatelná. Pak existuje $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ s.ř.
 $x' = Ax + BFx$ je asympt. stabilní.

nač platí: $\sigma(A + BF) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$,
 kde $\lambda_j \in \mathbb{R}$ jsou lihovité
 zvolené.

Lemma. Je dána soustava ⁽¹⁾ $x' = f(x, u)$,
 kde $f(0, 0) = 0$, $f \in C^1$ neoch $(0, 0) \in \mathbb{R}^{n+m}$
 nechť $U = \{u: [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m\}$, kde U obsahuje
 och $0 \in \mathbb{R}^m$. nechť lineární rovnice
 $x' = Ax + Bu$, kde $A = D_x f(0, 0)$, $B = D_u f(0, 0)$,
 je globálně regulovatelná ($\Leftrightarrow$ rank $K(A, B) = n$).
 Pak platí (pro přírodní soustavu ⁽¹⁾)

1) [Věta 18.3]. Lokální regulovatelnost:
 $\forall t > 0 \exists V$ och 0 t.j. $R(t) \supseteq V$

2) [Věta 18.5] Lokální stabilizovatelnost:
 $\exists F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ t.j. pro $x' = f(x, Fx)$
 je $0 \in \mathbb{R}^n$ asympt. stabilní

Pozn.: dorovnat pořadí: Věta 18.1.

18.3.

18.5

(viz v.d.)

18. III. Lineární náboje - časově omezená regulace

$$(4) \quad x' = Ax + Bu$$

$$x(0) = x_0$$

$$U = \{u(t) : [0, T] \rightarrow [-1, 1]^m\}$$

cíl: najít $u(\cdot) \in U$ t.č. $x_0 \xrightarrow[u(\cdot)]{t} 0$,
kde t je nejmenší možný.

? lineární! konvergenční

meštroje z FA: Baruch - Alloglu
Krein - Milman

Def. Řekneme, že $\{u_n(t)\} \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)$

konvergují *-slabě k $u(t)$, znamená

$u_n \xrightarrow{*} u$, jestliže platí:

$$\int_0^T \eta(t) \cdot u_n(t) dt \rightarrow \int_0^T \eta(t) \cdot u(t) dt$$

pro $\forall \eta(t) \in L^1(0, T; \mathbb{R}^m)$
neboli

ekvivalentné : po sloškách, y:

$$\int_0^T m(t) \underbrace{(u_m(t))}_i dt \rightarrow \int_0^T m(t) \underbrace{(u(t))}_i dt$$

po $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ i-té složka

$$\forall m(t) \in L^1(0, T; \mathbb{R})$$

Lemma 1. [Baruch-Alaoglu.]

mnosina $\mathcal{U}$ je $*$ -slobé sekvenčially konvergentná.

Pozn.: $u_m \xrightarrow{*} u \Rightarrow x_m(t) \rightarrow x(t)$
 $(u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m))$ bodové po $\forall t \in [0, T]$

dk.: variace konstant: t

$$x_m(t) = e^{tA} \left[x_0 + \underbrace{\int_0^t e^{-sA} B u_m(s) ds}_t \right]$$

$$\int_0^t e^{-sA} B u(s) ds$$

? ↓

i-se dožbe:

$$\begin{aligned}
 & \left(\int_0^t e^{-\rho A} B u_m(s) ds \right)_i \\
 &= \int_0^t \left(\right)_i ds = \int_0^t \sum_j \left(e^{-\rho A} B \right)_{ij} \left(u_m(s) \right)_j ds \\
 &= \sum_j \int_0^t \left(e^{-\rho A} B \right)_{ij} \left(u_m(s) \right)_j ds \\
 &= \sum_j \int_0^T \underbrace{\chi_{(0,t)}(s)}_{\text{"}} \left(e^{-\rho A} B \right)_{ij} \left(u_m(s) \right)_j ds \\
 & \quad \text{le zmeji!} \\
 & \quad m(s) \in L^1(0, T; \mathbb{R})
 \end{aligned}$$

Věta 18.6. Pro matici (4) je $R(t)$ konvergentní, symetrická, ukladná. Navíc $R(t_1) \subseteq R(t_2)$, pro $t_1 < t_2$.

Důk:

$$R(t) = \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ l.i. } \exists u(\cdot) \in \mathcal{U} \right. \\
 \left. x_0 \xrightarrow[u(\cdot)]{t} 0 \right\}$$

$$(KP) \quad x_0 \xrightarrow[\mu(\cdot)]{t} 0 \Leftrightarrow \left[x_0 = - \int_0^t e^{-\rho A} B u(s) ds \right]$$

konvex:
a sym.

$$x_i \xrightarrow[\mu_i(\cdot)]{t} 0, \quad i=1,2, \quad \alpha \in (0,1]$$

$$\Rightarrow \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \xrightarrow[\alpha \mu_1(\cdot) + (1-\alpha) \mu_2(\cdot)]{t} 0$$

$$-x_1 \xrightarrow[-\mu_1(\cdot)]{t} 0 \quad \in \mathcal{U} \quad \text{(konvex)}$$

? wemienot:

$$x_n \rightarrow x_0, \text{ falls } \underline{x_n \in \mathcal{R}(t)}$$

$$\Rightarrow x_0 \in \mathcal{R}(t)$$

wobei $\mu_n(\cdot) \in \mathcal{U}$ 1.2. $x_n \xrightarrow[\mu_n(\cdot)]{t} 0$

Bauch-Abgabe:

$$\mu_n \xrightarrow{*} \mu_0 \in \mathcal{U}$$

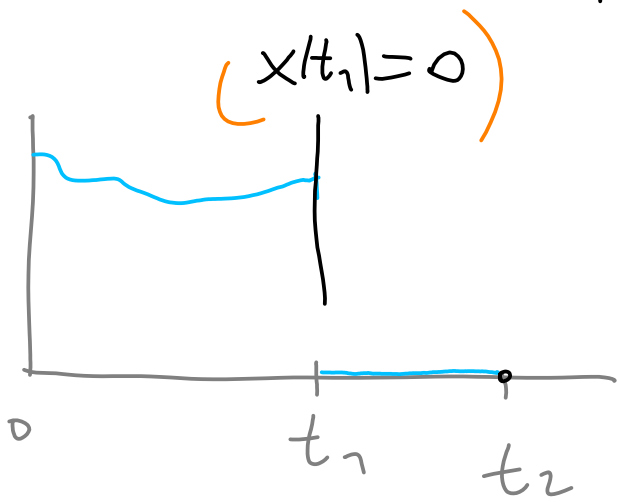
hier: beschränkt & (KP), z.B.

$$x_0 \xrightarrow[\mu(\cdot)]{t} 0, \text{ z.B. } x_0 \in \mathcal{R}(t).$$

reverse: $R(t_1) \subseteq R(t_2), t_1 < t_2$

nächst: $\boxed{x_0 \xrightarrow[n(\cdot)]{t_1} 0}$, zu given $n(\cdot) \in \mathcal{U}$

definiži $\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [0, t_1] \\ 0, & t \in [t_1, t_2] \end{cases}$



$$x' = Ax + \underbrace{Bu}_{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \quad (t > t_1)}$$

$\Rightarrow x \leq 0 \quad \forall t > t_1$

$$y: \quad x_0 \xrightarrow[\tilde{u}]{t_2} 0$$

Düddel. Množine globulni regulovalehozi.

$R_\infty = \bigcup_{t>0} R(t)$ je konvexní, symetrické.
rozkusek sjednocení

Ver 18.7. Rechts- und $\mathcal{K}(A, B) = n$, rechts-
 $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ für $\forall \lambda \in \sigma(A)$. Pz $R_\infty = \mathbb{R}^n$.

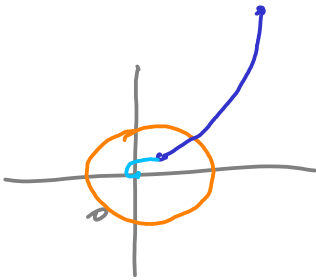
$$\operatorname{Re} \lambda \leq 0 \quad \text{and} \quad \forall \lambda \in \sigma(A). \quad \text{Put} \quad \mathbb{R}_\infty = \mathbb{R}^n.$$

D2. si h $\ddot{u}$ ej $\acute{s}$ p $\acute{r}$ e model: $\text{Re } \lambda < 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(A)$

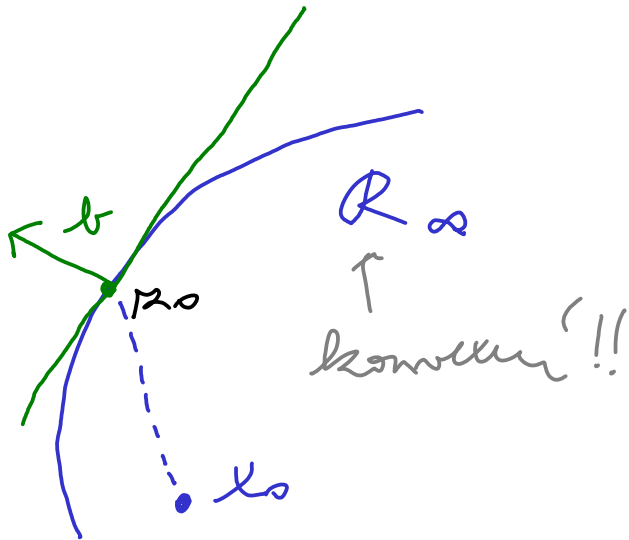
$\Rightarrow$ z V $\acute{e}$ ty 18.3 a analyz. stav.
(lok $\acute{a}$ ln $\acute{i}$ neg.)

$$x' = Ax$$

($\exists \epsilon > 0$)



obecn $\acute{y}$ p $\acute{r}$ pad: ?? $\mathcal{Q}_\infty = \bigcup_{t>0} \mathcal{R}(t) \neq \mathbb{R}^n$



$\Rightarrow \exists$ se $\acute{c}$ n $\acute{e}$ m $\acute{e}$ rn $\acute{i}$ m $\acute{o}$ dr.

$$\exists z_0 \in \partial \mathcal{Q}_\infty$$

$$\exists v \neq 0 \text{ t. } \tilde{v} \cdot (x_0 - z_0) \leq 0 \quad \forall x_0 \in \mathcal{Q}_\infty$$

$$\tilde{v} \cdot (x_0 - z_0) \leq 0 \quad \forall x_0 \in \mathcal{Q}_\infty$$

$$\Rightarrow \tilde{v} \cdot x_0 \leq C := \tilde{v} \cdot z_0$$

$$\forall x_0 \in \mathcal{Q}_\infty \quad (i)$$

ob $\acute{r}$ ec

n $\acute{i}$ me:
(K.P)

$$\tilde{v} \cdot x_0 = \tilde{v}^T x_0 = - \int_0^t \underbrace{\tilde{v}^T e^{-\rho A}}_{!!} B u(\rho) d\rho$$

$$x_0 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{u(\cdot)} 0$$

$\tilde{v}(\tilde{x}) \dots$ n $\acute{e}$ de $\acute{s}$

$\text{cil: } \left[\int_0^\infty |\nu(s)| ds = +\infty \quad (ii) \right] \Rightarrow \text{jem horor!}$

poloz

$$\tilde{u}(s) = \begin{cases} 0, & \nu(s) = 0 \\ \frac{-\nu^T(s)}{|\nu(s)|}, & \nu(s) \neq 0 \end{cases}$$

$\uparrow$
 u

$\mathbb{R}_\infty$
 $\Downarrow$
 $\text{dle (KE): } \tilde{x}_0 \xrightarrow[\tilde{u}(\cdot)]{t} 0 \text{ projiže } x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\text{dle } v^T \tilde{x}_0 = - \int_0^t \underbrace{v^T e^{sA}}_{\nu(s)} \underbrace{B \tilde{u}(s)}_{\frac{-\nu^T(s)}{|\nu(s)|} \text{ (} \nu \neq 0 \text{)}} ds$$

$$\Rightarrow \left[v^T \tilde{x}_0 = + \int_0^t |\nu(s)| ds \right]$$

$t \rightarrow +\infty \dots \text{dle (ii)} \quad PS \rightarrow +\infty, \text{ j.}$

$LS \rightarrow +\infty \quad \text{ } \uparrow \downarrow \text{ } (i)$

dyve' (iii)

$\leftarrow \text{d.w.} \left[\begin{array}{l} (iia) \\ (iib) \end{array} \right] \nu \neq 0$

$\nu(s) \dots \text{LK } \left(s^j e^{\mu s}, \text{Re } \mu \geq 0 \right)$

$$v(\rho) = v^T e^{-\rho A} B, \text{ kde } v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}.$$

$$\Rightarrow \text{(iib) n\u011bjn\u011b !! } \operatorname{Re} \sigma(-A) \geq 0$$

$$\text{ad (iia) ?? } v(\rho) \equiv 0$$

$$v^T e^{-\rho A} B \equiv 0 \quad / \left(\frac{d}{d\rho}\right)^k$$

$$v^T (-A)^k e^{-\rho A} B \equiv 0 \quad / \rho = 0$$

$$v^T \underbrace{A^k}_B = 0 \quad \forall k = 0, 1, \dots$$

$$\Leftrightarrow v \perp \text{sloupc } \underbrace{\mathcal{K}(A, B)}_{\substack{+ \\ 0}}$$

rank n



V\u011bta 18.8 Nechť $x_0 \in \mathbb{R}_\infty$. Pak $\exists t^* \geq 0$,
 $\exists u^*(\cdot) \in \mathcal{U}$ d.ř. $x_0 \xrightarrow[u^*(\cdot)]{t^*} 0$, kde t^* je
 nejmenší možný.

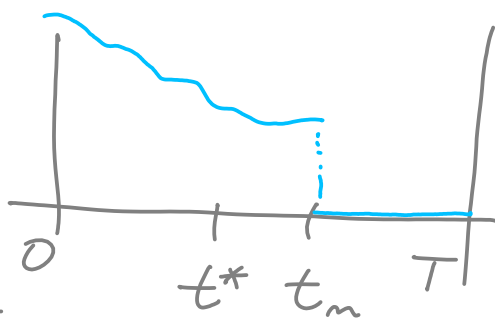
D\u016f. ozna\u0107 $t^* := \inf \{t > 0, x_0 \in R(t)\}$
 zvolit $t_n \searrow t^*, u_n(\cdot) \in \mathcal{U}$

$$L. \tilde{u}. \left[x_0 \xrightarrow[u_n(\cdot)]{t_n} 0 \right]$$

BÜNO

$$t_n < T \text{ sein}$$

$$u_n(s) = 0, \quad s > t_n$$



$$\left(\Rightarrow x_0 \xrightarrow[u_n]{t} 0, \quad \forall t \geq t_n \right)$$

def (Banach - Algebra) : $u_n \xrightarrow{*} u^* \in \mathcal{U}$

cit: $x_0 \xrightarrow[u^*]{t^*} 0 \quad (\Rightarrow \text{permanenter : inf} = \text{min})$

$$\text{dile (KP)} : x_0 = - \int_0^{t_n} e^{-\rho A} B u_n(s) ds$$

$$= - \int_0^T e^{-\rho A} B u_n(s) ds = - \underbrace{\int_0^{t^*} (\dots)}_{I_1} - \underbrace{\int_{t^*}^{t_n} (\dots)}_{I_2}$$

ansatz: $I_1 = \int_0^{t^*} e^{-\rho A} B u_n(s) ds \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^{t^*} e^{-\rho A} B u^*(s) ds$

$$|I_2| \leq C \cdot |t_n - t^*| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow$ *cíl* dosázen

$$\left(x_0 = - \int_0^{t^*} e^{-\rho A} B u^*(s) ds \right) \quad \square$$

Príkl. 3

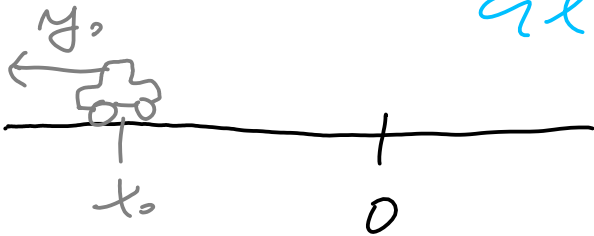
~~m~~ $x'' = u$
 $x(0) = x_0$
 $x'(0) = y_0$

(získame ne
 rozhodneme mēzi)

prizusne regulace $u(t) : [0, T] \rightarrow [-1, 1]$

cíl: $x(t^*) = x'(t^*) = 0$

$t^* \geq 0$ minimálne



$\Rightarrow$ $x' = y$
 $y' = u$

z. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} m=2 \\ m=1 \end{matrix}$

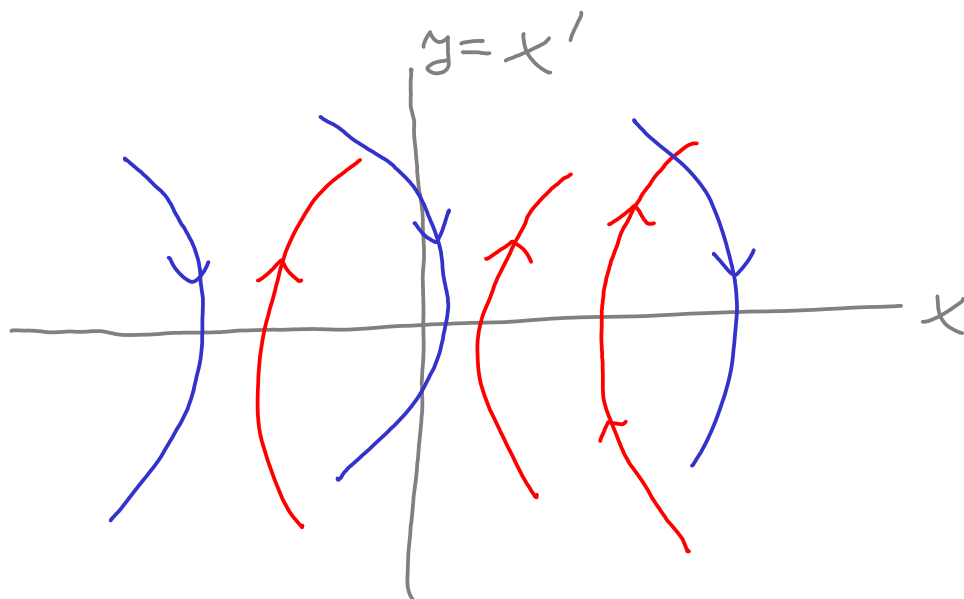
$K(A, B) = (B, AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dots$ *regulovateľný*

$$\sigma(A) = \{0\} \dots \text{v. 18.7.} \Rightarrow R_\infty = \mathbb{R}^2$$

$$\text{v. 18.8} \Rightarrow \exists \text{ c\u00e2r\u0219e optimale\u021bi regulate}$$

elemente min
analiza

$$(n = \pm 1)$$



$$(i) \quad n \equiv 1$$

$$x'' - 1 = 0$$

$$\frac{1}{2}y^2 - x = C$$

$$x = \frac{1}{2}y^2 - C$$

$$(ii) \quad n \equiv -1$$

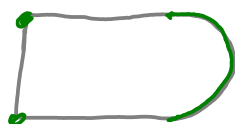
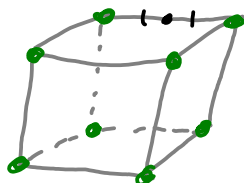
$$x = -\frac{1}{2}y^2 + C$$

Def. $a \in K$ se nume extremal\u0103, dac\u0102
 $a \in \text{ext } K$, iar dac\u0102: $\nexists x, y \in K, x \neq y$ s. z.

$$a = \frac{1}{2}(x+y).$$

Ekstremsit\u0103: $K \setminus \{a\}$ je convex.

P\u0103.



Tvorení [Hrein-Milman.]

necht X je ^{klasicky} LKP, $K \subset X$ neprázdné,
konvexní, kompaktní. Pak $K = \overline{\text{co}}(\text{ext} K)$,
zejména $\text{ext} K \neq \emptyset$.

Def. Řekneme, že $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ je bang-bang,
jestliže $(u(t))_i = \pm 1$ pro s.v. $t \in [0, T]$.
(Ekvivalence: $u(t) \in \text{ext} [-1, 1]^m$ s.v. t)

Věta 18.9. [Princíp bang-bang.]

necht $x_0 \in R(t)$. Pak $\tilde{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$ jsou
bang-bang 1. ř. $x_0 \xrightarrow[\tilde{u}(\cdot)]{t} 0$.

Dů. (málokdy) volíme $X = L^\infty(0, t; \mathbb{R}^m)$
se *-slabou topologií
(LKP)

$$K = \left\{ u(\cdot) \in \mathcal{U}; \left[x_0 \xrightarrow[u(\cdot)]{t} 0 \right] \right\}$$

time: $K \neq \emptyset$, convex, compact
 (KP) (Banach-Alaoglu)

Kr. Mil: $\Rightarrow \exists \tilde{u}(\cdot) \in K$ extreme in bod.

step: must $\tilde{u}(\cdot)$ long-long.

?? $\exists i \in \{1, \dots, m\}$

$\exists F \subset (0, t), \lambda(F) > 0$ s.t.

$$|u_i(s)| < 1 \quad \forall s \in F$$

define BUNO: $\exists \varepsilon > 0$ s.t.

$$|u_i(s)| \leq 1 - \varepsilon \quad \forall s \in F$$

define: $\phi(s) : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ s.t.

$$|\phi(s)| \leq \varepsilon \quad \forall s \in F$$

$$= 0 \quad \text{jinde}$$

note: $\int_F e^{-\rho A} u_i \phi(s) ds = 0 \quad \forall u_i$ stouzes
 notice B

def: $L^2(F, \mathbb{R}) \dots \dim = \infty$

12. Groučine podmínok ne rozhodnut.

jeu hovor: polož $v(s) = (0, \dots, 0, \phi(s), 0, \dots)^T$ ^{i-sed.}

$$\Rightarrow \int_0^t e^{-\rho A} B v(s) ds = 0 \in \mathbb{R}^m$$

$$\begin{aligned} u^1 &= \tilde{u} + v \\ u^2 &= \tilde{u} - v \end{aligned} \quad \dots \quad u^1, u^2 \in \mathcal{U},$$

dobre $\in K$

$$\Rightarrow \tilde{u} = \frac{1}{2} (u^1 + u^2) \dots \text{nemí} \quad \text{extremálmí}$$

Diel. nechť $x_0 \in R_\infty = \bigcup_{t>0} R(t)$.

$$\text{Paž } \exists u^*(\cdot) \in \mathcal{U} \text{ n.ž. } x_0 \xrightarrow[u^*(\cdot)]{t^*} 0$$

all t^* je minimální, naic

$u^*(\cdot)$ je sygn bang-bang.

seme: Ponizajimír princíp maximo

Vešle 18.10. [(PPM) pro n-tu (4)]. Necht x_0 ,
 $t^* \geq 0$ a $u^*(\cdot) \in \mathcal{U}$ jsou l.i. $x_0 \xrightarrow[u^*(\cdot)]{t^*} 0$,
 kde t^* je minimální. Pak $\exists h \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$
 l.i. $\left\{ \begin{array}{l} h \cdot e^{-tA} B u^*(t) = \max_{y \in [-1,1]^m} h \cdot e^{-tA} B y \\ (5) \end{array} \right.$
 pro o.v. $t \in [0, t^*]$

Analogie. Lagrangeovy multiplikátory
 bod a lok. max. $F(x)$
 s $\{G_1 = G_2 = \dots = G_n = 0\} \Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$
 l.i.

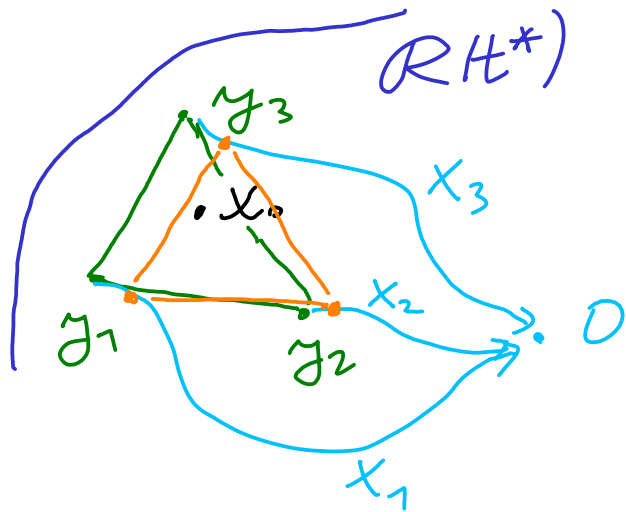
$$\nabla F(a) = \lambda_1 \nabla G_1(a) + \dots + \lambda_n \nabla G_n(a)$$

$\rightsquigarrow$ podezřelé body

2.: prozkoumání: $x_0 \in \partial R(t^*)$

?? $\exists \varepsilon > 0$ l.i. $U(x_0, \varepsilon) \subset R(t^*)$

Bůho: $U(x_0, \varepsilon) \subseteq \text{co} \{y_1, \dots, y_{m+1}\}$



$$\exists u^{(j)} \in U \text{ a. z.}$$

$$y_j \xrightarrow{t^*} 0$$

lim⁻ x_j -- přístupu řešení

vol $\delta > 0$ a. z. $x_0 \in \text{co} \{ \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{m+1} \}$
(male)

$$\text{zde } \tilde{y}_j = x_j(\delta)$$

$$\Rightarrow x_0 \in R(t^* - \delta), \text{ neboť zřejmě}$$

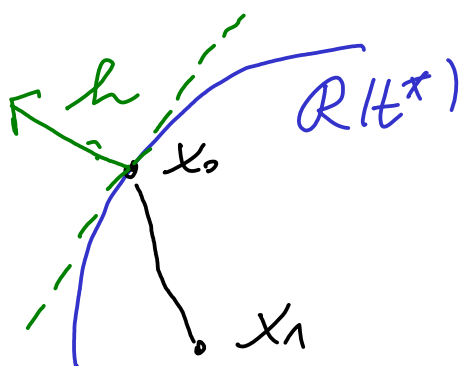
$$\tilde{y}_j \in R(t^* - \delta)$$

↑
homotopie

$$\text{y. } x_0 \in \partial R(t^*)$$

$$\Rightarrow \exists \text{ sekce nadroviny, y. } h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

$$\text{a. z. } \left\{ \begin{array}{l} h \cdot (x_1 - x_0) \leq 0 \quad \forall x_1 \in R(t^*) \end{array} \right.$$



$$x_0 = - \int_0^{t^*} e^{-\rho A} \underline{B_m^*(s)} ds$$

$$x_1 = - \int_0^{t^*} e^{-\rho A} \underline{B_m(s)} ds$$

proziere $u(\cdot) \in \mathcal{U}$

$$\Rightarrow \int_0^{t^*} h^T e^{-\rho A} B [u^*(s) - u(s)] ds \geq 0$$

pro $\forall u(\cdot) \in \mathcal{U}$

Skizze: (5) impliziert ... ?? nach (5)

$$1. \exists E \subset (0, t^*), \lambda(E) > 0$$

$$2. \forall s \in E \exists \gamma_s \in [-1, 1]^m$$

$$h^T e^{-\rho A} B u^*(s) < h^T e^{-\rho A} B \gamma_s$$

Definiere $\tilde{u}(s) := \begin{cases} \gamma_s, & s \in E \\ u^*(s), & \text{sonst} \end{cases}$

$\tilde{u} \in \mathcal{U}$

lci: $\int_0^{t^*} h^T e^{-\rho A} B [u^*(s) - \tilde{u}(s)] ds$

$$= \int_E h^T e^{-\rho A} B [u^*(s) - \gamma_s] ds < 0$$

< 0 on E

Pozn. měřítko $\rho \mapsto \gamma_\rho \dots ??$

Příklad 3 (dokončení) $\exists$ číselně opt. reg.
syst. bang-bang.

? PPT: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{-\rho A} = \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\perp \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\exists h = (h_1, h_2) \neq 0$

(definice e^{tA}
... nikoliv A)

1.2. $h \cdot e^{-\rho A} B u^*(\rho) = \max_{\gamma \in [-1, 1]} h \cdot e^{-\rho A} B \gamma$

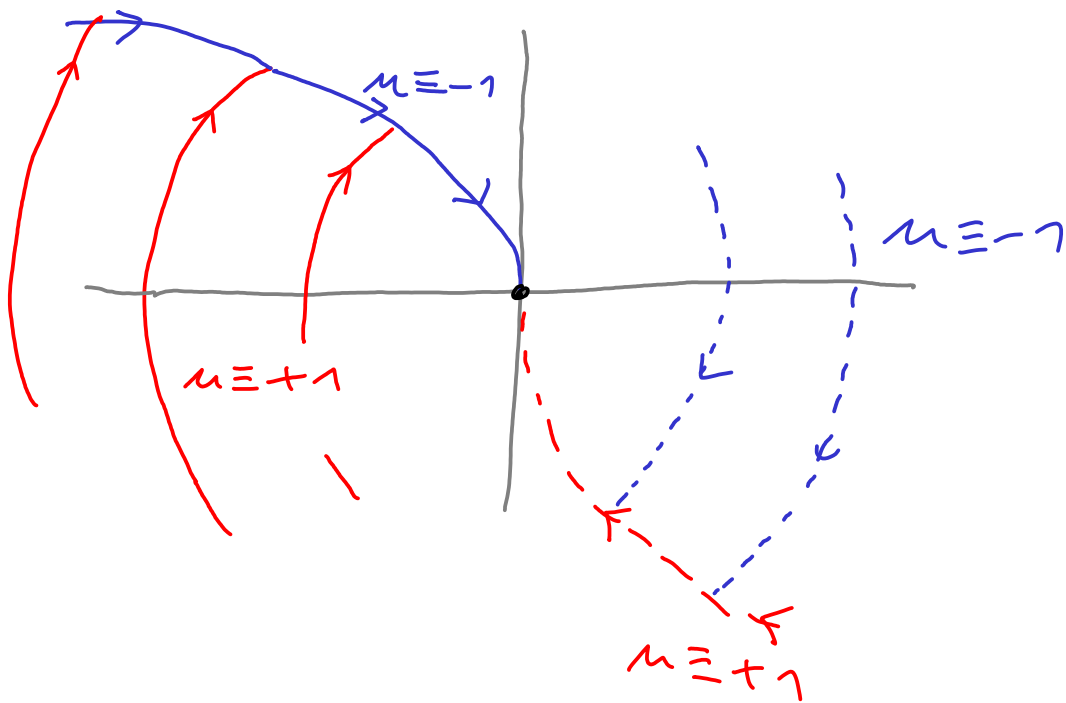
$(h_2 - h_1 \rho) u^*(\rho) = \max_{\gamma \in [-1, 1]} (h_2 - h_1 \rho) \gamma$

$\Rightarrow u^*(\rho) = \operatorname{sgn}(h_2 - h_1 \rho)$

tg. $u^*(\rho) = \pm 1$ navíc

maximálně nejvýše 1 změna
směrně

$\Rightarrow \exists! u^*(\cdot) \text{ pro } \forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$



18.IV. PPT pro Bolzovu úlohu

$$\begin{cases} x' = f(x, u) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \text{přizpůsobená regulace } \mathcal{U}: \left\{ u(t) : [0, T] \rightarrow \mathcal{U}, \text{ měřitelné} \right\} \cap \mathbb{R}^m$$

(6)

cíl: $\max P[u(\cdot)] = g(x(T)) + \int_0^T r(x(t), u(t)) dt$
 $T > 0$ zadané, $x(T)$ není měněno (Bolza)

Věta 18.11 [PPT - Bolzova úloha].

Nechť $u^*(\cdot) \in \mathcal{U}$ je lokálním maximum (6),
 nechť $x^*(\cdot)$ je příslušné řešení a nechť
 $f = f(x, u)$, $r = r(x, u)$ a $g(t)$ jsou C^1

me obdržíme grafy $x^*(t), u^*(t)$ resp. bodu $x^*(T)$.

Potom: pro o.v. $t \in [0, T]$ je

$$H(x^*(t), \lambda^*(t), \underline{u^*(t)}) = \max_{\gamma \in U} H(x^*(t), \lambda^*(t), \underline{\gamma})$$

kde $H(x, \lambda, u) = \lambda^T f(x, u) + r(x, u)$
je sv. Hamiltonián, a $\lambda^*(t)$ je řešení
adjungované úlohy

$$(\lambda^T)' = -(\nabla_x H)(x^*(t), \lambda, u^*(t))$$

$$\lambda^T(T) = (\nabla_x g)(x^*(T))$$

Pozn. pro složky:

$$H(x, \lambda, u) = \sum_j \lambda_j f_j(x, u) + r(x, u)$$

$$\lambda_i' = - \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x^*, u^*) + \frac{\partial r}{\partial x_i}(x^*, u^*)$$

$$\lambda_i(T) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(x^*(T))$$

Příklad 6 [maximalizace vs. inverze]

$x(t)$... celkový zisk

$z > 0$... přínosný náklad

$u(t): [0, T] \rightarrow [0, 1]$... *minimální inverze*

$$x' = z x u$$

cíl: $\max P[u(\cdot)] = \int_0^T x(t) \cdot \underbrace{(1 - u(t))}_{\text{minimální zisk}} dt$

(1/T) zisk

$x(0) = x_0 > 0$ *celkový zisk*
dežno

$x(T)$... *není měno*

PPN?

$$f = z x u$$

$$r = x(1 - u)$$

$$H = r f + r = r z x u + x(1 - u)$$

$$H = x \left[1 + \underline{u} \left(\underline{r z - 1} \right) \right]$$

pozor: musíme $x(t) > 0$ ($\Leftarrow x' = x \cdot \underline{z u}$)

$$\max_{z \in [0, 1]} H(x^*, z^*, \gamma)$$

$$x(0) = x_0 > 0$$

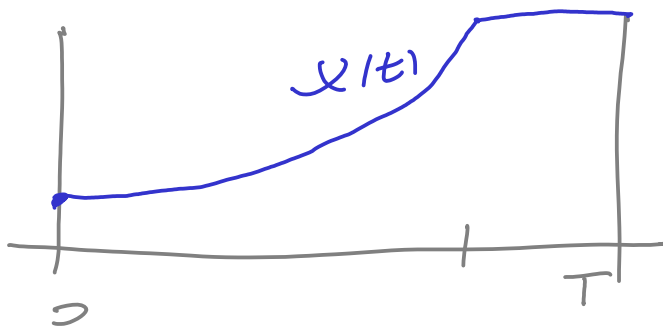
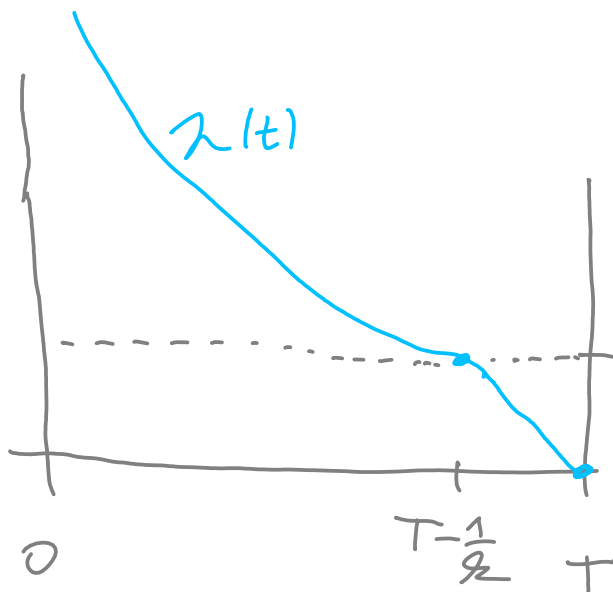
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \lambda(t) \geq 0 & \Rightarrow \lambda(t) = 0 \\ \lambda(t) \geq 1 & = 1 \end{array} \right]$$

adjungované

úloha: $\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial x} = -(1 + \lambda(\lambda_2 - 1))$

$$\lambda' = \begin{cases} -1 & \lambda_2 < 1 \\ -\lambda_2 & \lambda_2 > 1 \end{cases}$$

$$\lambda(T) = 0 \quad (\Leftarrow g \equiv 0)$$



Závěr: optimální $u(t)$ (pokud existuje!)

má tvar:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t < T - \frac{1}{\lambda_2} \\ 0, & t \geq T - \frac{1}{\lambda_2} \end{cases}$$

22. V. 18. 11. $\text{nechť} : u(\cdot) \in \mathcal{U} \dots \text{lok. max}$
 (negmede m^*) $x(\cdot) \dots \text{přidružené řešení}$
 $\lambda(\cdot) \dots \text{řešení (9), (10)}$

KROK 1: $\text{nechť spec. } \tau \equiv 0$, tj. $P[u(\cdot)] = g(x(\tau))$

$$H = \lambda^T f(x, u)$$

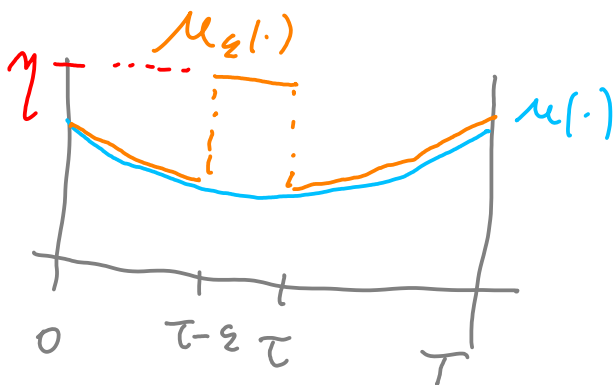
$\Rightarrow$ adj. rovnice

$$(\lambda^T)' = -\lambda^T \nabla_x H(x, u)$$

$$\lambda^T(\tau) = (\nabla_x g)(x(\tau))$$

variac $u(\cdot)$: fix $\eta \in \mathcal{U}$, $\tau \in (0, \tau)$

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} \eta, & t \in (\tau - \varepsilon, \tau) \\ u(t), & \text{jinde} \end{cases}$$



$x_\varepsilon(t) \dots \text{odpovídající řešení}$

oznám:

$$D := \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0+}$$

vidíme: $P[u_\varepsilon(\cdot)] \leq P[u(\cdot)]$, $\varepsilon > 0$ malé
 $g(x_\varepsilon(\tau)) \leq g(x(\tau))$ / D

$$\Rightarrow \boxed{0 \geq D(g(x_\varepsilon(\tau))) = D_x g(x(\tau)) \cdot \underbrace{DX_\varepsilon(\tau)}_{=0}}$$

pomocný problém: $DX_\varepsilon(t) = ? \quad \forall t \in (0, \tau)$

(i) $DX_\varepsilon(t) = 0, \quad t < \tau \quad (\Leftarrow x_\varepsilon \equiv x \quad t < \tau)$

(ii) $DX_\varepsilon(\tau) = ?$ (poraději)

(iii) $DX_\varepsilon(\tau)$... $t > \tau$... převedu na (ii)

poznámka: $t > \tau \Rightarrow u_\varepsilon \equiv u; \forall y. x_\varepsilon(t) = y_\varepsilon(t)$

nebo $y_\varepsilon(t)$ řeší:

$$D = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \left[\begin{array}{l} y' = f(y, u(t)) \\ y(\tau) = x_\varepsilon(\tau) \end{array} \right]$$

$\Rightarrow DX_\varepsilon(t) := R(t)$ -- řešení níže ve
variacích

$$\boxed{\begin{array}{l} R' = D_x f(x, u) R \\ R(\tau) = N \end{array}}$$

nebo $N := DX_\varepsilon(\tau)$

2. KROK: $DX_\varepsilon(\tau) = ?$... a definition:

$$x(\tau) = x_0 + \int_0^\tau f(x(s), u(s)) ds$$

$$x_\varepsilon(\tau) = x_0 + \int_0^\tau f(x_\varepsilon(s), u_\varepsilon(s)) ds$$

$0 < \tau - \varepsilon$

$$\frac{x(\tau) - x_\varepsilon(\tau)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau-\varepsilon}^\tau f(x(s), u(s)) - f(x_\varepsilon(s), u) ds$$

(u_\varepsilon \equiv u, (\tau-\varepsilon, \tau))

lim $\varepsilon \rightarrow 0+$

$\downarrow$ $DX_\varepsilon(\tau)$ $\downarrow$ $(?)$

main* P.S. $\rightarrow f(x(\tau), u) - f(x(\tau), u(\tau))$

Lemma 18.3. wecht $x' = A(t)x$, $(x^T)' = -x^T A(t)$,
and $A(t) \in L^1(0, \tau)$. For $t \mapsto x(t) \cdot x(t)$

is constant.

Dz. $(x \cdot x)' = (x^T x)' = (x^T)' x + x^T x'$

$$= -x^T A(t) x + x^T A(t) x = 0.$$

□

jédro di kom:

$$0 \geq \underbrace{(\nabla_x g)(x(T))}_{\lambda(T)} \cdot \underbrace{DX_\varepsilon(T)}_{\lambda(T)}$$

(adj. isobles) (ne ne var.)

$$(\lambda^T)' = -\lambda^T A(t)$$

$$\lambda' = A(t)\lambda$$

L. 18.3

all $A(t) = \nabla_x g(x(t), u(t))$

$\Rightarrow$

$$\lambda(\tau) \cdot \lambda(\tau) \equiv \text{same } t \in [\tau, T]$$

$$\lambda(\tau) \cdot \lambda(\tau) \leq 0$$

$$DX_\varepsilon(\tau) = f(x(\tau), \gamma)$$

$$- f(x(\tau), u(\tau))$$

$\Rightarrow$

$$\lambda^T(\tau) f(x(\tau), \gamma) \leq \lambda^T(\tau) f(x(\tau), u(\tau))$$

ij. (pn) (7) pro domo
(τ, γ isobles) isobles.

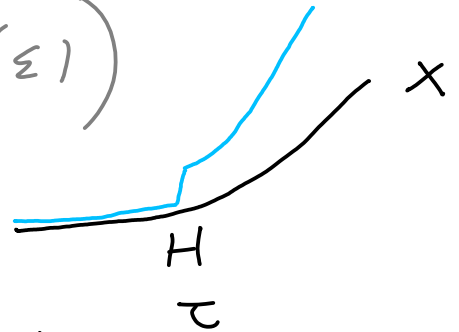
2b. článek: $\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} f(x_\varepsilon(s), \eta) - f(x(s), \eta(s)) ds$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} \overbrace{f(x(s), \eta) - f(x(s), \eta(s))}^{\phi(s)} ds$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} f(x_\varepsilon(s), \eta) - f(x(s), \eta) ds$$

$$= I_1^\varepsilon + I_2^\varepsilon.$$

• $I_2^\varepsilon \rightarrow 0$ elementárně, neboť $\forall t \in I \quad |x(t) - x_\varepsilon(t)| \leq C\varepsilon$
 $(\Rightarrow \text{integrand } O(\varepsilon))$



• Lebesgueova věta: $\phi(s) \in L^1(0, T)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} \phi(s) ds \rightarrow \phi(\tau) \text{ pro s.v. } \tau$$

3. krok: $n(x, \eta) \neq 0$ obecně

... přivedu na předchozí

$$\underline{x}' = f(\underline{x}, u) \quad x(0) = x_0$$

$$x'_{n+1} = r(\underline{x}, u) \quad x_{n+1}(0) = 0 \quad (\text{železné rovice})$$

$$\Rightarrow P[u(\cdot)] = g(\underline{x}(T)) + \underbrace{\int_0^T r(\underline{x}(s), u(s)) ds}_{x_{n+1}(T)}$$

tedy $X = \begin{pmatrix} \underline{x} \\ x_{n+1} \end{pmatrix}, \quad G(X) = g(\underline{x}) + x_{n+1}$

↑ uříjí krok 1
(d.w.) $\square$