17. Sturm-Liouvilleova teorie

Problém $$(p(t)x')' + (\lambda r(t) + q(t))x = 0 \quad (1)$$

$t \in I$

+ okr. podm.: $$c_1 x(a) + c_2 p(a) x'(a) = 0 \quad (2a)$$
$$c_3 x(b) + c_4 p(b) x'(b) = 0 \quad (2b)$$

Předpoklady $I = [a, b]$

$p(t), r(t), q(t) \in C(I)$

navíc $p(t), r(t) > 0 \quad \forall t$

$(c_1, c_2) \neq \underset{\sim}{0}, \quad (c_3, c_4) \neq \underset{\sim}{0}$

Pozn.: (1) ... lineární, homogenní

(2a), (2b) ... půjde rovnou splnit jen pro jisté λ

Příklad. $x'' + \lambda x = 0$ v $[0, \pi]$

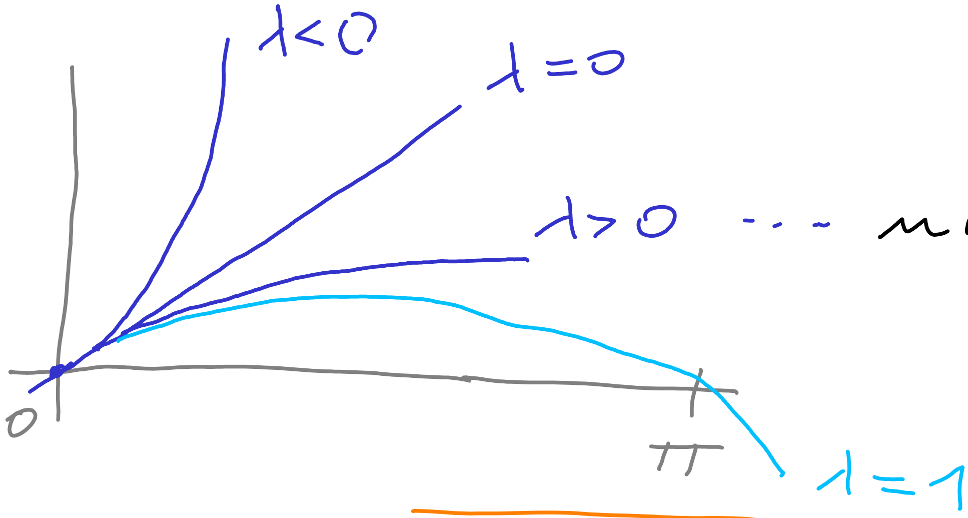
$x(0) = 0$

$x(\pi) = 0$

? $\exists$ netriv. řešení

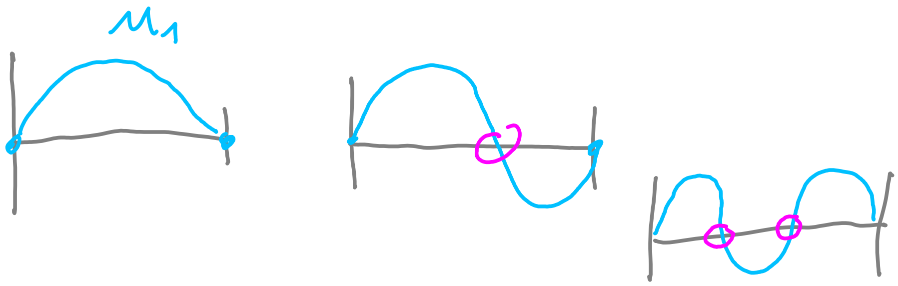
$x(0) = 0, \ x'(0) = 1$ (13 úno)

$(k = \sqrt{\lambda})$



$\lambda>0 \;\dots\; u(t) = \sin kt$

obecně: $\boxed{u_k(t) = \sin kt}$ $\quad \lambda_k = k^2 \quad \forall k \geq 1$



úplné OG báze v $L^2(0,\pi)$

Věta 17.1 $\exists\ \lambda_1 < \lambda_2 < \dots\ \lambda_k \longrightarrow +\infty$

t.ž. (1), (2a), (2b) má netriv. řešení u_k

$\iff \lambda = \lambda_k$ pro jisté k

navíc: u_k má právě $k-1$ nulových bodů v (a,b)

$\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ tvoří úplnou OG bázi

$L^2_r(a,b)$, $\quad \langle x,y\rangle_r = \int_a^b x(t)y(t)r(t)\,dt$

Lemma 17.1. [O polárních souřadnicích]

nechť $(\xi(t), \eta(t)) : I \to \mathbb{R}^2 \setminus \underset{\sim}{0}$ spojité

Pak : $\exists\ \rho(t) : I \to (0, \infty)$

$\phi(t) : I \to \mathbb{R}$ spojité a.ž.

$$\xi(t) = \rho(t) \cos \phi(t)$$

$$\eta(t) = \rho(t) \sin \phi(t)$$

pro $t \in I$

navíc: ρ, ϕ stejně hladké jako ξ, η
(C^2, AC, ...)

Dk. pomocné zobrazení:

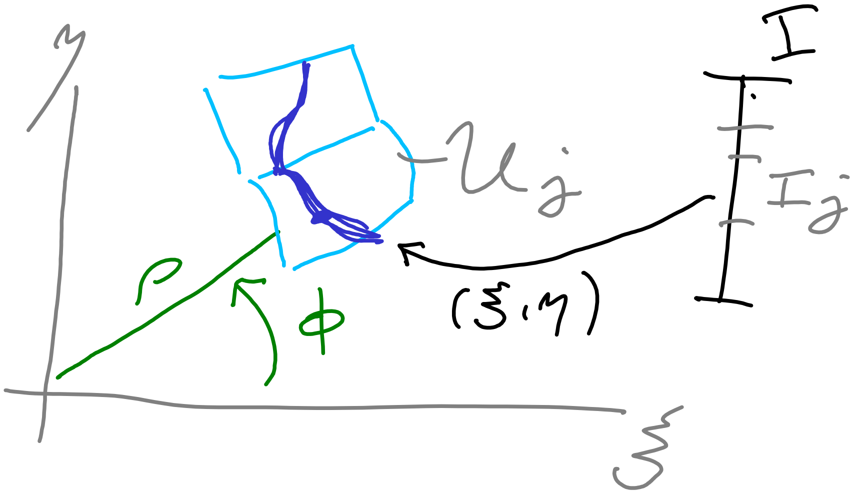
$$(\rho, \phi) \longmapsto (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi)$$

$$(0,\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \underset{\sim}{0}$$

dle VoIF: $\Psi_j : \mathcal{U}_j \to \mathbb{R}^2$ spojité

$\exists$ lokální C^∞ inverze

položme: $(\rho_j(t), \phi_j(t)) = \Psi_j(\xi(t), \eta(t))$



$t \in I_j$

globální: vhodné slepení fcí ρ_j, ϕ_j

(případné posuny $\phi_j + 2k\pi$) $\square$

Pozn. 1) pojem řešení: Carathéodory

$x(t),\ p(t)x'(t) \in AC(I)$

(1) platí s.v. v I

(!! p.s. $\in L^2_r(I)$)

2) pohled z FA $\Leftrightarrow$ vlastní čísla operátoru $-\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}) \longrightarrow L^1(I)$$

$$x \longmapsto (px')' + qx$$

(tj. (1) $\Leftrightarrow$ $\mathcal{L}x + \lambda r x = 0$)

kde $\mathcal{D}(\mathcal{L}) = \{x \in AC(I),\ \underline{p}x' \in AC(I)$ a splní (2a), (2b)$\}$

obecně $\nexists\, x''$

3) obecnější výhled: $\Delta u + \lambda u = 0$ v B

$u = 0$ na ∂B

Ansatz: (Four. metoda) (B 1-kruh v $\mathbb{R}^2$)

$$u = u(r,\phi) = f(r)h(\phi)$$

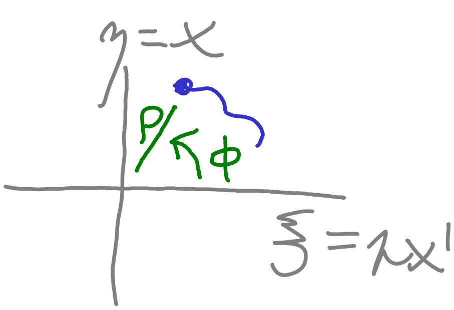
$$h'' + n^2 h = 0 \qquad \phi \in [0, 2\pi]$$

$$(rf')' + \left(r\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2}{r}\right) f = 0 \qquad r \in [0,1]$$

Prüferova transformace

(1) $$(\underbrace{px'}_{\xi})' + (\lambda r + q)\underbrace{x}_{\eta} = 0 \qquad t \in I$$

L.17.1. $\Rightarrow$ $\xi = \rho \cos\phi, \ \eta = \rho \sin\phi$



rutinní výpočet (d.d.cv.)

(1') $$\xi' = -(\lambda r + q)\eta$$
$$p\eta' = \xi$$

$$\Rightarrow \quad \rho' = \rho\left(\frac{1}{r} - (\lambda r + q)\right)\cos\phi \sin\phi \qquad (3)$$

$$\boxed{\phi' = \frac{1}{r}\cos^2\phi + (\lambda r + q)\sin^2\phi} \qquad (4)$$

nezobrazuje ρ

? okr. podm.: BÚNO: $(c_1, c_2) = (\cos\alpha, -\sin\alpha)$

$(c_3, c_4) = (\cos\beta, -\sin\beta)$

$$(2a) \Leftrightarrow (\xi(a), \eta(a)) \parallel (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

$$(c_1, c_2) \cdot (\eta(a), \xi(a)) = 0$$

$$(\cos\alpha, -\sin\alpha) \perp (\eta(a), \xi(a))$$

$$(2b) \Leftrightarrow (\xi(b), \eta(b)) \parallel (\cos\beta, \sin\beta)$$

tj: $(2a), (2b) \Leftrightarrow$ (5a) $\phi(a) = \alpha + \left(\overset{=0}{l}\pi \quad \text{BÚNO}\right)$

$(\xi, \eta) = \rho(\cos\phi, \sin\phi)$ (5b) $\phi(b) = \beta + k\pi$

$l, k \in \mathbb{Z}$

CELKEM: $\exists\, x$ netriv. řešení (1), (2a), (2b)

$$\Updownarrow$$

$\exists\, \phi = \phi(t)$ řešení (4), t.ž.

$$\phi(a) = \alpha$$

$$\phi(b) = \beta + k\pi$$

Lemma 17.2 Označme $\phi = \phi(t, \lambda)$ řešící funkce (4) s poč. podm. (5a) $\phi(0) = \alpha$.

Potom platí: 1. $\lambda \mapsto \phi(b, \lambda)$ rostoucí, spojitá

2. $\phi(b, \lambda) \to +\infty$, $\lambda \to +\infty$

3. $\phi(b, \lambda) \to 0$, $\lambda \to -\infty$

Pozn. srovnej: Sturmova věta (ODR1)

Dk. 1. spojitá závislost na parametru

rostoucí $\Leftarrow$ $\dfrac{\partial \phi}{\partial \lambda}(t, b) > 0$

(rovnice ve variacích: $\psi = \dfrac{\partial \phi}{\partial \lambda}$

(4) $\phi' = \underbrace{\frac{1}{2}\cos^2\phi + (\lambda r + q)\sin^2\phi}_{f(\phi,\lambda)}$ $\Big/ \frac{\partial}{\partial\lambda}$

$$\psi' = \frac{\partial f}{\partial \phi}\psi + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \quad ; \quad \boxed{\psi(a) = 0}$$

$$= \underbrace{\left[\left(\lambda r + q - \frac{1}{2}\right) 2\sin\phi\cos\phi\right]}_{a}\psi + \underbrace{r\sin^2\phi}_{b>0}$$

(razen $\phi = 2\pi$)

tj.: $\boxed{\psi' = a(t)\psi + b(t)}$

integriraj: $\psi(t) = \int_a^t \underbrace{e^{A(s)-A(t)}}_{>0 \text{ s.v.}} b(s)\,ds$

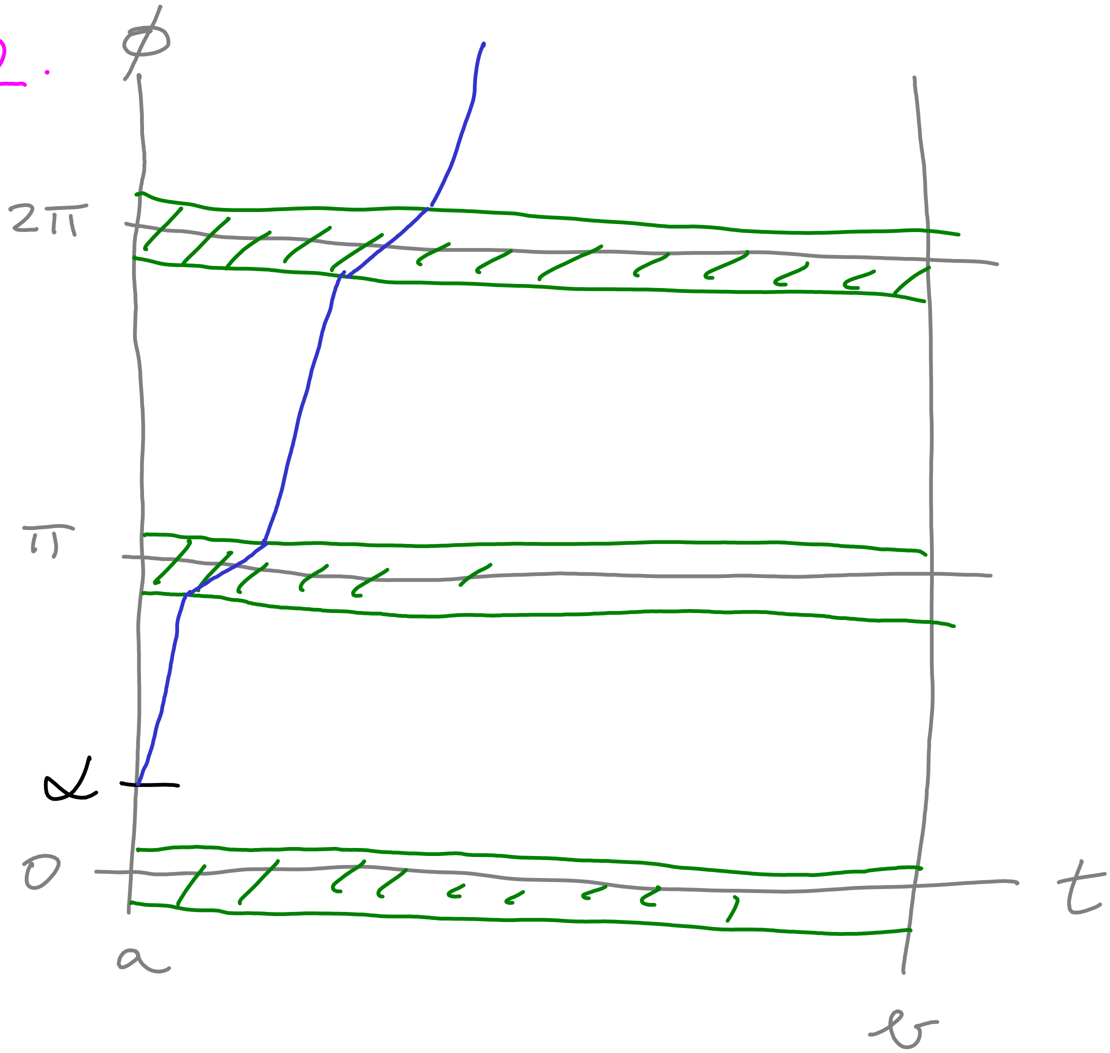
$\psi(t) > 0, \; \forall t > a$. kjer je $A(t) = \int_a^t a(s)\,ds$

$\Uparrow$

pozorniji: $b > 0$ s.v. $\left(b(t) = 0 \iff \phi(t) = m\pi \right.$

$\left. \phi'(t) > 0 \Longleftarrow (4) \right)$

2.



označme $\Gamma = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n\pi - \varepsilon, n\pi + \varepsilon]$

$\varepsilon > 0$ malé

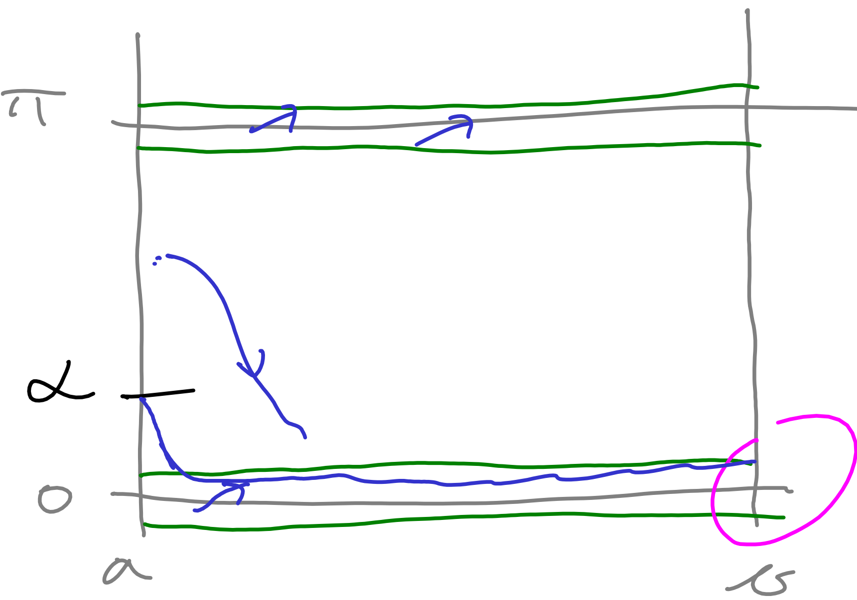
(4) $\phi' = f(\phi, \lambda)$, kde: $f \geq \begin{cases} \frac{1}{p_0} & \text{na } \Gamma \\ K & \text{jinde} \end{cases}$

K velké

$$f(\phi, \lambda) = \frac{1}{2}\cos^2\phi + (\lambda r + q)\sin^2\phi$$

(λ velké)

3. analogicky: $f \begin{cases} > 0 & \text{v } \Gamma \\ < -L & \text{jinde} \end{cases}$

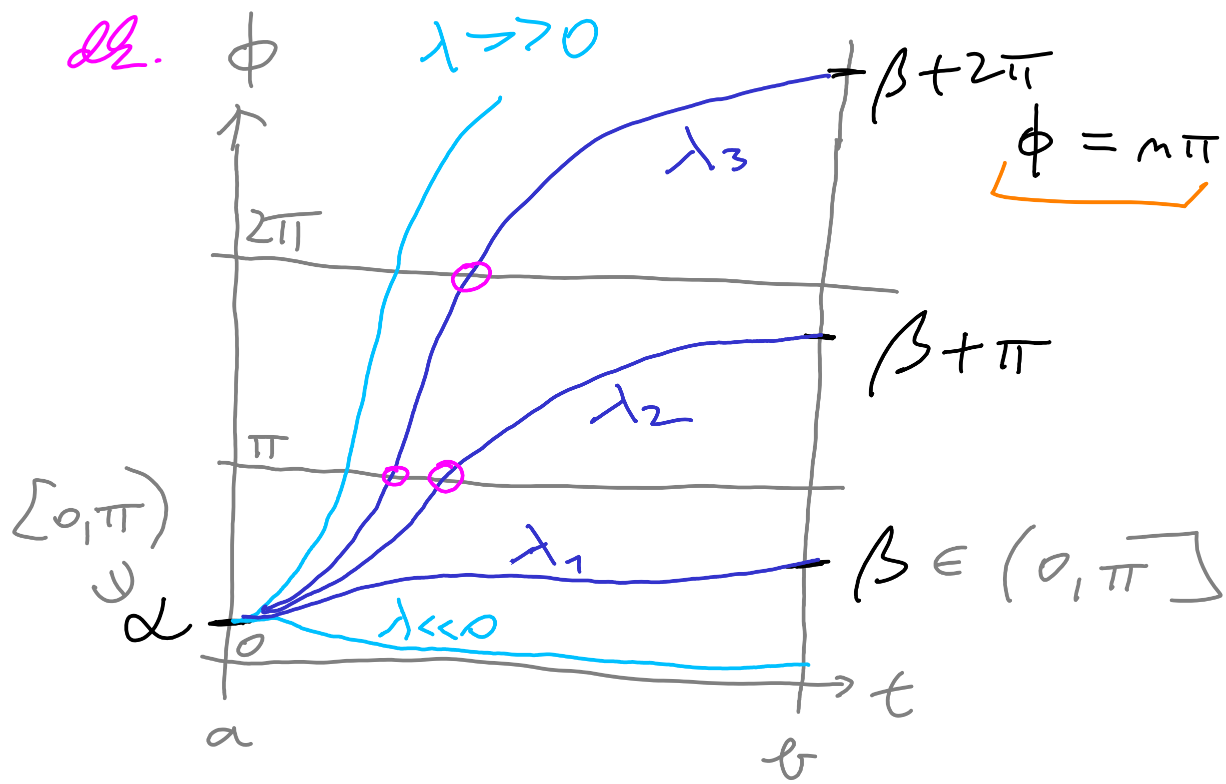


□

Důkaz. 1. část Věty 17.1.

($\exists\, \lambda_k, \mu_k$, počty nul. bodů)

Il.



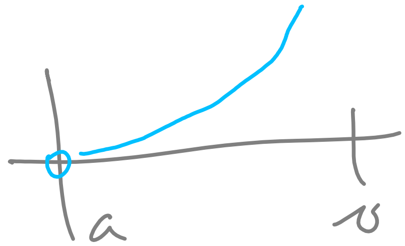
$\underbrace{\phi = n\pi}$ $\iff$ $\eta = 0$

$\iff$ $\underbrace{x = 0}$

□

Pozn.: singulární Sturm-Liouvilleova úloha

(I neomezený, $p(t)$, $q(t)$ neomezené nebo nulové na krajích)



Besselova rce.

Lemma 17.3 Operátor $\mathcal{L}$ je symetrický, má pouze reálné vlastní čísla, a vl. vektory (příslušné různým vl. číslům) jsou kolmé v $L^2_r(a,b)$.

Dk. 1) $\langle \mathcal{L}x, y\rangle \overset{?}{=} \langle x, \mathcal{L}y\rangle \quad \forall x,y \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$

LS: $$\int_a^b \big(\underbrace{(px')'}_{\text{p.p.}} + qx\big) y\,dt = \underbrace{\big[px'y\big]_a^b}_{(*) = ?} - \underbrace{\int_a^b px'y' - qxy\,dt}_{=}$$

PS: $(x \leftrightarrow y)$ $$\int_a^b \big((py')' + qy\big) x\,dt = \big[py'x\big]_a^b - \int_a^b py'x' - qyx\,dt$$

$$(*)\quad \underbrace{p(b)x'(b)y(b)}_{=(*)} - \underbrace{p(a)x'(a)y(a)}_{=(*)}$$
$$= p(b)y'(b)x(b) - p(a)y'(a)x(a)$$

víme: x, y splní $\boxed{(2a)}$, (2b)

tj. $(p(a)x'(a), x(a)) \perp (c_2, c_1)$

$(p(a)y'(a), y(a)) \perp (c_2, c_1)$

$\Longrightarrow (p(a)x'(a), x(a)) \overset{(*)}{\perp} (-y(a), p(a)y'(a))$

analogicky: $(**) \Longleftarrow$ (2b)

2. $\mathcal{L}x + \lambda r x = 0$, $x \neq 0 \Longrightarrow \bar{\lambda} = \lambda$

(d.d.cv.): užijte: $\langle x, y \rangle_r = \int_a^b x(t)\bar{y}(t)r(t)\,dt$

3. $\mathcal{L}x_1 + \lambda_1 r x_1 = 0$

$\mathcal{L}x_2 + \lambda_2 r x_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle x_1, x_2 \rangle_r = 0$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ (d.d.cv.)

$\square$

Lemma 17.4. Nechť: u, v ... LN řešení (1)

Pak $\exists\, C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ t.ž. $uv' - u'v = \frac{C}{p}$ v I.

Dk.: $(p v' \cdot u - p u' \cdot v)' \underset{s.v.}{=} (p v')' u + \cancel{p v' u'} - (p u')' v - \cancel{p u' v'}$

Leibniz pro AC fce

$\overset{(1)}{=} -(\lambda r + q) v \cdot u + (\lambda r + q) u \cdot v$

$= 0 .$

$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}: \quad p v' u - p u' v \equiv c$

$u v' - u' v \equiv \frac{c}{p}$

? $c \neq 0 \Leftarrow u, v$ LN; tj: $\begin{vmatrix} p u' & p v' \\ u & v \end{vmatrix} \neq 0$

Prüfer: $\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & -\lambda r(t) + q(t) \\ \frac{1}{p(t)}, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ $\quad$ v I

Pozn.: jinak: Liouvilleova formule (ODR1)

$\det \Phi \equiv$ konst

Lemma 17.5. Nechť $\lambda \neq \lambda_k, \forall k, \; h(t) \in L^2_r(a,b)$

Pak $\exists !$ řešení $w(t)$ rce

(7) $(p(t)x')' + (\lambda_2(t) + q(t))x = r(t)h(t)$, $t \in I$,

splňující (2a), (2b).

Dk. volme $u(t)$ resp. $v(t)$ ... libovolné $\neq 0$ řešení (1), splňující (2a) resp. (2b)

$\Rightarrow$ nutně LN! $(\lambda \neq \lambda_k)$

Hádáme: řešení lze uhodnout: (idea: v.k.)

$$w(t) = \frac{1}{c}\left(v(t) \underbrace{\int_a^t u(s)h(s)r(s)\,ds}_{A(t)} + u(t) \underbrace{\int_t^b v(s)h(s)r(s)\,ds}_{B(t)} \right)$$

c z L. 17.4

ověření:

$$w' = \frac{1}{c}\left(v' \int_a^t uhr\,ds + \cancel{v \cdot uhr} + u' \int_t^b vhr - \cancel{u \cdot vhr} \right)$$

$\Downarrow$

$$w'(t) \overset{(*)}{=} \frac{1}{c}\left(v' \int_a^t uhr\,ds + u' \int_t^b vhr \right)$$

Rovnice (7): $(p w')' = \; ?$

$$= \frac{1}{c}\left(p v' \int_a^t u h r + p u' \int_t^b v h r \right)'$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\cancel{c}}\Big(\underbrace{(p v')'}_{= -(\lambda r+q)v} \cdot \int_a^t u h r + \underbrace{(p u')'}_{= -(\lambda r+q)u} \cdot \int_t^b v h r}_{= -(\lambda r+q)w} + \underbrace{p v' \cdot u h r - p u' \cdot v h r}_{= \cancel{c} \cdot h r \; [\text{L. } 17.4]} \Big)$$

$$\Longrightarrow \quad (p w')' + (\lambda r + q) w = h r$$

Okrajové podm.: $t = a$ (analogicky: $t = b$)

$$w(a) = \frac{1}{c} u(a) \int_a^b v h r \, ds \quad , \text{ tj. } (w(a), w'(a))$$

$$w'(a) \overset{(*)}{=} \frac{1}{c} u'(a) \int_a^b v h r \, ds \qquad = A\,(u(a), u'(a))$$

u splní (2a) $\Longrightarrow$ w splní (2a) jednozn. $\Leftarrow$ V. 17.1, 1. část $\square$

Greenův operátor: $G_\lambda : L^2_r(a,b) \to D(\mathcal{L})$

$$h(t) \longmapsto w(t)$$

kde platí: $$w(t) = \int_a^b G_\lambda(t,s)\, h(s)\, r(s)\, ds$$

kde $$G_\lambda(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{c} v(t) u(s) & s<t \\ \frac{1}{c} v(s) u(t) & s>t \end{cases}$$

zřejmě: $$G_\lambda = (\mathcal{L} + \lambda r)^{-1}$$, tzv. resolventa $\mathcal{L}$.

Lemma 17.6. Nechť $\lambda \neq \lambda_k$, $\forall k$. Pak G_λ je kompaktní, symetrický (v $L^2_r(a,b)$) a platí $G_\lambda(u_k) = \frac{1}{\lambda - \lambda_k} u_k$, $\forall k$. [d.ú]

Dk. dokonce $\ulcorner L^1_r(a,b) \longrightarrow C([a,b]) \urcorner$ kompaktní

$$\begin{tikzcd} & L^1_r(a,b) \arrow[r] & C([a,b]) \arrow[d, hook] \\ L^2_r(a,b) \arrow[ur, hook] & & L^2_r(a,b) \end{tikzcd}$$

nechť: $\{h_n(t)\} \subset L^1(a,b)$ omez.

$\overset{?}{\Rightarrow}$ $w_n(t) = G_\lambda(h_n(t))$ rel. komp. v $C([a,b])$

víme:

$$w_n(t) = \frac{1}{c}\Big(v(t)\cdot A_n(t) + u(t)\cdot B_n(t)\Big)$$

$$w_n'(t) \overset{(*)}{=} \frac{1}{c}\Big(v'(t)\cdot A_n(t) + u'(t)\cdot B_n(t)\Big)$$

kde $A_n(t) = \int_a^t u h_n r \, ds$, $B_n(t) = \int_t^b v h_n r \, ds$

pozoruji: $|A_n(t)| \le \int_a^b |u||h_n||r| \, ds \le C \underbrace{\int_a^b |h_n|}_{\text{omezené}}$

$|B_n(t)| \le \dots$

$\Rightarrow$ $|w_n(t)| \le C \quad \forall n$ (stejně omezené)

$$|w_n'(t)| \overset{(*)}{\le} C\cdot\Big(|v'(t)| + |u'(t)|\Big) =: K(t)$$

$\in L^1(a,b)$

$$|w_n(t_1) - w_n(t_2)| \le \int_{t_1}^{t_2} K(s)\, ds$$

Arzelà–Ascoli

(stejně spojité) $\square$

Pozn.: v řeči FA: $(\mathcal{L}+\lambda_n)$ prostý $\Leftrightarrow$ je na ~~obecněji~~ $\operatorname{Rng}(\mathcal{L}+\lambda_n) = \operatorname{Ker}(\mathcal{L}+\lambda_n)^{\perp}$

zbývá: úplnost $\Leftrightarrow$ $S = \{0\}$ $L^2_r(a,b)$.

kde $S = \{ h \in L^2_r(a,b) ;\ \langle h, u_k \rangle_r = 0$ pro $\forall k \}$

Lemma 17.8 nechť $\lambda \neq \lambda_k$ $\forall k$ je zcela libovolné.

Potom: S je uzavřený podprostor, $G_\lambda(S) \subset S$,

a pokud $S \neq \{0\}$ $\Rightarrow$ $G_\lambda \neq 0$ na S.

Dk.: uzavřenost, podprostor : jasné

$(S = \{u_1, u_2, \ldots\}^{\perp})$

invariance : $h \in S \overset{!}{\Rightarrow} G_\lambda(h) \in S$

$$\langle G_\lambda(h), u_k \rangle_r \overset{L.17.6}{=} \langle h, \underbrace{G_\lambda(u_k)}_{\frac{1}{\lambda-\lambda_k} u_k} \rangle$$

$$= \frac{1}{\lambda-\lambda_k} \langle h, u_k \rangle$$

netriv? buď $h \in S$, $h \neq 0$, polož $w := \mathcal{G}_\lambda(h)$

$\Updownarrow$

v I je: $\mathcal{L}w + \lambda_R w = \underbrace{r h}_{\neq 0}$

$w \neq 0 \Leftarrow$

tj. $\mathcal{G}_\lambda \neq 0$. $\square$

Důsl. Věta 17.1, část 3 (rozklad $\{u_k\}$)

?? $S \neq \{0\}$ .... užij následující fakt z FA: H -- Hilb. pr.

T -- kompakt. sym. operátor na H

$T \neq 0 \Rightarrow \exists \neq 0$ vlastní číslo

aplikace:

$H = S$

$T = \mathcal{G}_\lambda$ $(\lambda \neq \lambda_R)$

$T \neq 0$ ($\Leftarrow$ L. 17.8.)

$\Rightarrow \exists y \in S$, $\exists \mu \neq 0$ t.ž.

$\mathcal{G}_\lambda(y) = \mu y \Leftrightarrow \mathcal{L}(\mu y) + \lambda_R(\mu y) = r y$

$$\mathcal{L}(y) + \left(\lambda - \frac{1}{\mu}\right) r y = 0$$

$\Rightarrow$ $y \neq 0$ řešení (1), (2a), (2b)

nechť $\neq 0$ řešení

& $y \in S$, tj. $\langle y, u_k \rangle = 0$ $\forall k$

$\lightning\lightning$

$\square$