16. Carathéodoryho teorie

teorie ODR

- „klasické" ---- $x(t) \in C^1$, $f = f(x,t)$ spojité (Riemannův int.)
- Carathéodory: „moderní" ---- $x(\underline{\underline{t}}) \in AC$, $f = f(x, \underline{\underline{t}})$

  spojité (v x) měřitel. (v t)

Úmluva: $I \subset \mathbb{R}$ (libovolný) interval

Def. $x(t) : I \to \mathbb{R}$ se nazve absolutně spojité, značíme $x \in AC(I)$, pokud:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.ž. pro libovolné disjunktní $(a_i, b_i) \subset I$ platí: $\sum_i |a_i - b_i| < \delta$

$$\Rightarrow \sum_i |f(a_i) - f(b_i)| < \varepsilon$$

Funkce se nazve lokálně absolutně spojité, značíme $x \in AC_{loc}(I)$, pokud $x \in AC(J)$ pro $\forall J \subset I$ kompaktní int.

Tvrzení 1. $x \in AC(I) \Rightarrow \exists\, x'(t)$ vlastní s.v.

$x'(t) \in L^1(I)$

a platí $x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} x'(s)\,ds$

pro $\forall t_1, t_2 \in I$

← Lebesg. int.

Tvrzení 2. $h \in L^1(I)$, označ $x(t) = \int_{t_0}^{t} h(s)\,ds$ ← pevné číslo

$\Rightarrow x \in AC(I)$, navíc $x'(t) = h(t)$ s.v.

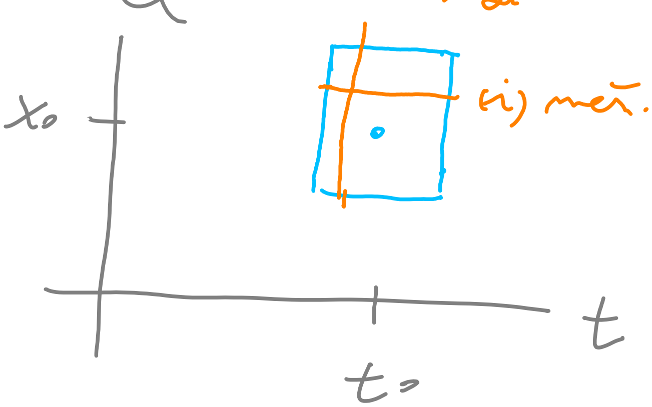
Značení.

$\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otev. mn. s body $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$U = U(x_0, \delta)$ ... otev. okolí v $\mathbb{R}^n$

$Q(t_0, x_0) = Q(t_0, x_0; \delta, \Delta)$ ... válec v $\mathbb{R}^{n+1}$

(ii) spoj. $= (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times U(x_0, \Delta)$



$$x' = f(t,x)$$
$$x(t_0) = x_0$$

Def. Řekneme, že $f(t,x): \Omega \to \mathbb{R}^n$ splňuje Carathéodoryho podmínky, značíme $f \in CAR(\Omega)$, jestliže: $\forall (t_0, x_0) \in \Omega \quad \exists\, Q(t_0, x_0; \delta, \Delta) \subset \Omega$

$\exists\, m \in L^1(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$

s.ž. (i) pro $\forall x \in U(x_0, \Delta)$ je $f(\cdot, x)$ měřitelná

(ii) pro s.v. $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ je fce $f(t, \cdot)$ spojitá

(iii) $|f(t, x)| \leq m(t)$ pro s.v. t pro $\forall x$

Def. Nechť $f \in CAR(\Omega)$. Funkce $x(t): I \to \mathbb{R}^n$ se nazve řešením rovnice (16.1) $x' = f(t, x)$ v Carathéodoryho smyslu, jestliže:

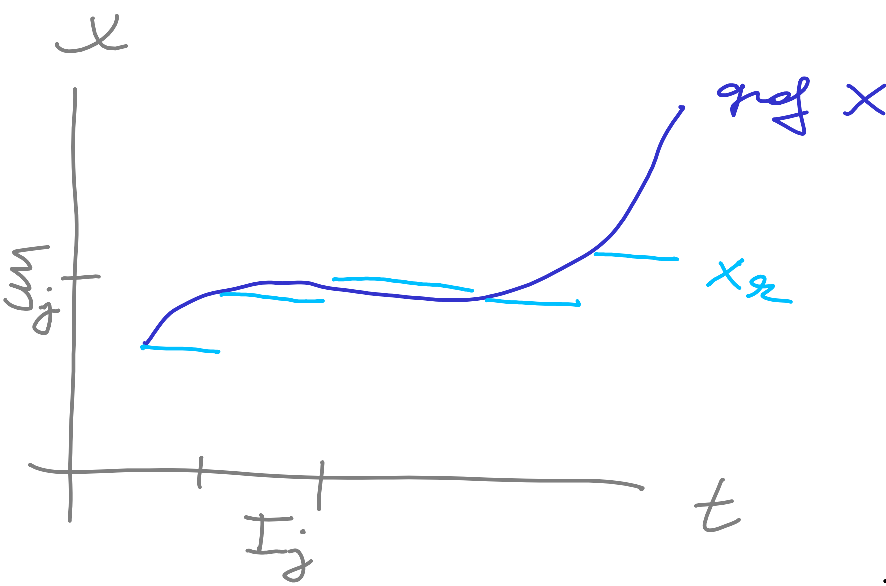
- graf $x \subset \Omega$
- $x \in AC_{loc}(I)$
- platí $x'(t) = f(t, x(t))$, pro s.v. $t \in I$

Lemma 16.1 $f \in CAR(\Omega)$

$x: I \to \mathbb{R}^n$ spojitá, graf $\cancel{I}$ x $\subset \Omega$

$\Rightarrow t \mapsto f(t, x(t)) \in L^1_{loc}(I)$

Dk.: ? měřitelnost: volme $x_k(t)$ ... po částech konstantní aproximace $x(t)$



tj. $x_k(t) \equiv \xi_j$ na $I_j \subset I$

$\Downarrow$

$f(t, x_k(t)) = f(t, \xi_j)$ na I_j

$\Rightarrow$ měřitelné (lokálně)

$k \to \infty \Rightarrow x_k(t) \to x(t)$ (dokonce $\overset{loc}{\rightrightarrows}$)

$\Rightarrow f(t, \underbrace{x_k(t)}_{\text{spojitost}}) \to f(t, x(t))$ s.v. t

$\Rightarrow f(t, x(t))$ měřitelné

? lokální integr.: fix. $t_0 \in I$, $x_0 = x(t_0)$

$\exists\, Q(t_0, x_0; \delta, \Delta) \subset \Omega$

BÚNO: graf $x|_{[t_0-\delta, t_0+\delta]} \subset Q$

$\Rightarrow |f(t, x(t))| \leq m(t) \in \mathcal{L}^1$

$\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$

Lemma 16.~~1~~ 2 Nechť $f \in CAR(\Omega)$, nechť $x : I \to \mathbb{R}^n$ je spojité, graf $x \subset \Omega$. Pak x je řešení (16.1) ve smyslu Carathéodoryho $\Longleftrightarrow$

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s))\, ds \quad \text{pro } \forall t_1, t_2 \in I$$

Dk.: $\Rightarrow$: $x'(t) = f(t, x(t))$ s.v. t / $\int_{t_1}^{t_2} \dots$

LS: $x(t_2) - x(t_1)$ ---- J.1, $x \in AC$

$\Leftarrow$ fix. $t_0 \in I$,

$t \in I$ lib.:

$$x(t) = \underbrace{x(t_0)}_{= x_0} + \int_{t_0}^{t} \underbrace{f(s, x(s))}_{\in \mathcal{L}^1_{loc}}\, ds, \quad (\Leftarrow \mathcal{L}.16.1)$$

J.2 $\Rightarrow$ P.S. $\in AC$, $\frac{d}{dt}$

$$x'(t) = \frac{d}{dt}\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \dots\right) = f(t, x(t))$$

s.v. t $\square$

Věta 16.1. [Zobecněná Banachova.]

nechť: Λ, X ... metrické prostory

$X \neq \emptyset$, úplný

$$\Phi = \Phi(\lambda, x) : \Lambda \times X \to X$$

je spojité vůči λ pro $\forall x$ pevné

a nechť (klíčový předpoklad):

$\exists \kappa \in (0,1)$ t.ž. „uniformní kontrakce"

$$\|\Phi(\lambda, x) - \Phi(\lambda, y)\| \leq \kappa \|x - y\|$$

pro $\forall \lambda \in \Lambda$

$\forall x, y \in X$

Pak: (i) pro $\forall \lambda \in \Lambda$ $\exists!$ $x(\lambda) \in X$

t.ž. $\Phi(\lambda, x(\lambda)) = x(\lambda)$

(ii) $\lambda \longmapsto \cancel{\Phi}^{x}(\lambda)$ je spojité

(iii) $\|y - x(\lambda)\| \leq (1-k)^{-1} \|y - \Phi(\lambda, y)\|$

$\forall \lambda \in \Lambda, y \in X$

Pozn.: podrobné značení: $\|x-y\| = \rho_X(x,y)$

Dk.: (i): definuji posloupnost fcí

$x_n(\lambda): \Lambda \longrightarrow X$ s.t.

pevně libovolné

$x_0(\lambda) = y \in X$

$$(*) \quad \boxed{x_{n+1}(\lambda) = \Phi(\lambda, x_n(\lambda))}$$

indukcí: $\|x_n(\lambda) - x_{n-1}(\lambda)\|$

$$= \|\Phi(\underline{\underline{\lambda}}, x_{n-1}(\lambda)) - \Phi(\underline{\underline{\lambda}}, x_{n-2}(\lambda))\|$$

$$\leq k \|x_{n-1}(\lambda) - x_{n-2}(\lambda)\|$$

$$\dots \leq k^{n-1} \|\underbrace{\Phi(\lambda, y)}_{x_1(\lambda)} - \underbrace{y}_{x_0(\lambda)}\|$$

$$\forall m > n: \ \|x_m(\lambda) - x_n(\lambda)\|$$

$$\leq \sum_{j=n+1}^{m} \|x_j(\lambda) - x_{j-1}(\lambda)\|$$

$$\leq \underbrace{\sum_{j=n+1}^{m} K^{j-1}} \|\Phi(\lambda, y) - y\|$$

$$\leq \frac{K^n}{1-K} \|\Phi(\lambda, y) - y\|$$

$\Longrightarrow$ $\{x_n(\lambda)\}_n \subset X$ .. cauchyovská

(pro $\lambda \in \Lambda$ pevné)

$\Longrightarrow$ $\exists \lim\limits_{n \to \infty} x_n(\lambda) =: x(\lambda)$

(*) $x_{n+1}(\lambda) = \Phi(\lambda, x_n(\lambda)) \quad \Big| \ n \to \infty$

$$x(\lambda) = \Phi(\lambda, x(\lambda))$$

tj. (i) platí

?? jednoznačnost $\Longleftarrow$ kontrakce speciálně: $x(\lambda)$ nezávisí na y

(iii) z důkazu (i):

$$\|x_m(\lambda)-x_n(\lambda)\| \le \frac{K^n}{1-K}\|\Phi(\lambda,y)-y\|$$

vol: $n=0$, $m\to\infty$

$$\|x(\lambda)-y\| \le \frac{1}{1-K}\|\Phi(\lambda,y)-y\|$$

(ii) volme $y=x(\lambda_0)$; $\underset{\substack{\shortparallel\\ \lambda}}{\lambda_n}\to\lambda_0$ libovolné

$$\|x(\lambda_n)-x(\lambda_0)\| \le \frac{1}{1-K}\|\Phi(\lambda_n,x(\lambda_0))-\underbrace{x(\lambda_0)}_{\substack{\shortparallel\\ \Phi(\lambda_0,x(\lambda_0))}}\|$$

$$\le \frac{1}{1-K}\|\Phi(\lambda_n,x(\lambda_0))-\Phi(\lambda_0,x(\lambda_0))\|$$

$\lambda_n\to\lambda_0$, Φ spoj. vůči λ, pro pevné x

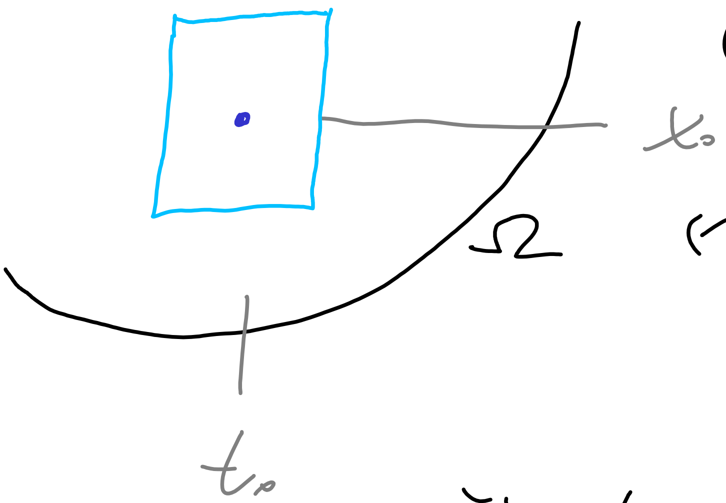
PS $\to 0$, a tedy $x(\lambda_n)\to x(\lambda_0)$ □

Opakuj: $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ ... $\boxed{f \in CAR(\Omega)}$

(i) $t \mapsto f(t,x)$ ... měřitelné $(\forall x)$

(ii) $x \mapsto f(t,x)$ ... spojité (s.v. t)

(iii) $|f(t,x)| \le m(t) \in L^1_{loc}$ (lokálně)



řešení: $x \in AC_{loc}(I)$

rovnice s.v.

$\Updownarrow$ L. 16.2

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds$$

$\forall t \in I$

Věta 16.1 [zobecněný Banach.]

$\Phi(\lambda, x): \Lambda \times X \to X$ Λ ... m.p.

spojité X ... m.p. $\neq \emptyset$ úplný

!! $\forall \lambda, x, y$ $\|\Phi(\lambda,x) - \Phi(\lambda,y)\| \le K\|x-y\|$, $\boxed{K \in (0,1)}$

$\Rightarrow \quad \lambda \longmapsto x(\lambda)$ je spojité, kde

$$\Phi(\lambda, x(\lambda)) = x(\lambda)$$

Věta 16.2 [zobecněná Picardova]

nechť: $I = [0,T]$, Π ... metr. pr.

$f = f(t,x,\lambda) : I \times \mathbb{R}^n \times \Pi \to \mathbb{R}^n$

s.ž.: 1. $f(\cdot,\cdot,\lambda) \in CAR(I \times \mathbb{R}^n)$ pro $\forall \lambda \in \Pi$ pevné

2. $\exists\, \ell(t) \in L^1(I)$ s.ž.

$$|f(t,x,\lambda) - f(t,y,\lambda)| \le \ell(t)|x-y|$$

pro $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \Pi$

s.v. $t \in I$

3. zobrazení $\lambda \longmapsto \int_0^t f(s,x(s),\lambda)\,ds$

$$\Pi \longrightarrow C(I)$$

je spojité pro $\forall x \in C(I)$ pevné

Potom: $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n \ \forall \lambda_0 \in \Pi \ \exists!\, x \in AC(I)$ řešení $x' = f(t, x, \lambda_0)$

$$x(0) = x_0$$

Navíc: řešení závisí spojitě na x_0, λ_0

tj.: $x_{n_0} \to x_0 \in \mathbb{R}^n$

$\lambda_{n_0} \to \lambda_0 \in \Pi$

$\Rightarrow x_n \to x$ v $C(I)$

(tj. stejnoměrně v I)

Dk.: aplikuji Větu 16.1

$$X = C(I), \quad \|x\| = \sup_{t \in [0,T]} |x(t)| e^{-Lt}$$

($L > 0$ určíme později)

TRIK

$$\Lambda = \mathbb{R}^n \times \Pi \ni (x_0, \lambda_0)$$

funkcionál: $\Phi : (x_0, \lambda_0, x(\cdot)) \longmapsto x_0 + \int_0^t f(s, x(s), \lambda_0)\, ds$ $\quad \forall t \in [0,T]$

$$\Lambda \times X \to X$$

všechno sedí: pevný bod $\underset{L.16.2}{\Longleftrightarrow}$ hledané řešení spojitost Φ, spojitost $x(\cdot)$

resp. t_0, z_0 ... OK

složité: uniformní kontrakce ?

fixuji: $t_0, z_0, x(\cdot), y(\cdot)$

označme: $\hat{x}(\cdot) = \Phi(t_0, z_0, x(\cdot))$

$\hat{y}(\cdot) = \Phi(t_0, z_0, y(\cdot))$

cíl: $\|\hat{x} - \hat{y}\| \le K \|x - y\|$, pro $K < 1$

$$|\hat{x}(t) - \hat{y}(t)| = \left| \int_0^t f(s, x(s), z_0) - f(s, y(s), z_0)\, ds \right|$$

$$\le \int_0^t \ell(s) \underbrace{|x(s) - y(s)|}_{\le e^{Ls} \|x-y\|} ds$$

$\Rightarrow$

$$|\hat{x}(t) - \hat{y}(t)| \cdot e^{-Lt} \le \underbrace{\left(\int_0^t \ell(s) e^{L(s-t)} ds \right)}_{\le \frac{1}{2},\ \text{nezávisle na } t} \|x - y\|$$

$\sup_{t \in [0,T]}$ .... jsem hotov, jestliže

víme $\ell(t) \in L^1([0,T])$, tj. lze psát

$$e(t) = e_1(t) + e_2(t), \quad \text{kde} \quad \int_0^T e_1(s)\,ds \le \frac{1}{4}$$

(už nevýznamné)

$$|e_2| \le M \quad \text{(velké)}$$

$$\Rightarrow \int_0^t e(s)\, e^{L(s-t)}\, ds = \int_0^t e_1(s)\, \underbrace{e^{L(s-t)}}_{\le 1}\, ds + \int_0^t \underbrace{e_2(s)}_{\le M}\, e^{L(s-t)}\, ds = K_1 + K_2$$

$$\underline{K_1 \le \frac{1}{4}}, \quad \underline{K_2} \le \int_0^t M\, e^{L(s-t)}\, ds$$

$$= M \int_0^t e^{-\sigma L}\, d\sigma \le M \cdot \int_0^\infty e^{-\sigma L}\, d\sigma = \underline{\frac{M}{L}}$$

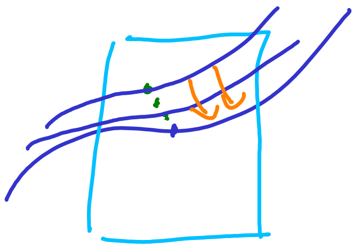
$$L \ge 2M \Rightarrow K_2 \le \frac{1}{2}, \text{ tj. } K \le \frac{3}{4} \qquad \square$$

Pozn.: 1) podm. 2: zobecněné lokální lipsch. vůči $\underline{\underline{x}}$.

2) klasické teorie: lokální jedn. $\Longleftrightarrow$ globální jedn.

$\Updownarrow$

lokální (glob.) spojité závislost na poč. podm.



3) Osgoodova věta:

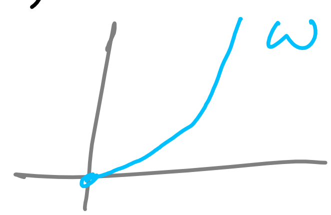
modulus spojitosti

$$|f(t,x)-f(t,y)| \le k(t)\,\omega(|x-y|)$$

(lokálně)

kde $k(t) \in L^1$

$$\int_0^1 \frac{ds}{\omega(s)} = +\infty$$



$\Downarrow$

lokální jednoznačnost

srovnej: $|f(t,x)-f(t,y)| \le L\,|x-y|$

(klasické teorie)