15. Poincaré-Bendixsonova teorie

problém: $\exists$ per. řešení v $\mathbb{R}^2$

Úmluva: (1) $x' = f(x)$ $\quad f: \Omega \to \mathbb{R}^{\cancel{n}\,2}, \ \Omega \subset \mathbb{R}^2$ oblast
(C^1)

... $\varphi(t, x)$ ... d.s.
(má smysl pro $\forall x \in \Omega$, $t \geq 0$)

Def. γ ... křivka $\Leftrightarrow$ $\gamma = \varphi([a,b])$

kde $\varphi: [a,b] \to \gamma$ spojité, prosté

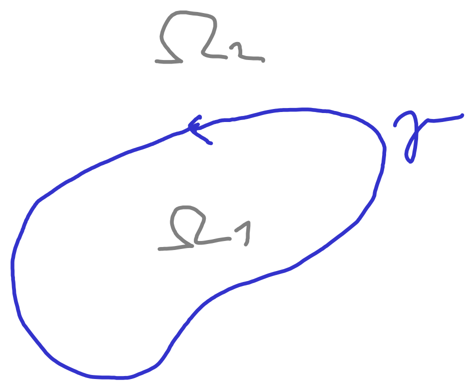
Jordanova křivka $\Leftrightarrow$ $\gamma = \varphi([a,b])$

kde $\varphi: [a,b] \to \gamma$ spoj. prosté na $[a,b)$
$\varphi(a) = \varphi(b)$.

Pozn.: orbit (per. orbit) $\Rightarrow$ křivka (Jord. křivka)

Jordanova věta. $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ Jord. křivka

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}^2 = \Omega_1 \cup \gamma \cup \Omega_2$ (disj.)



kde $\Omega_{1,2}$ otevř., souvislé

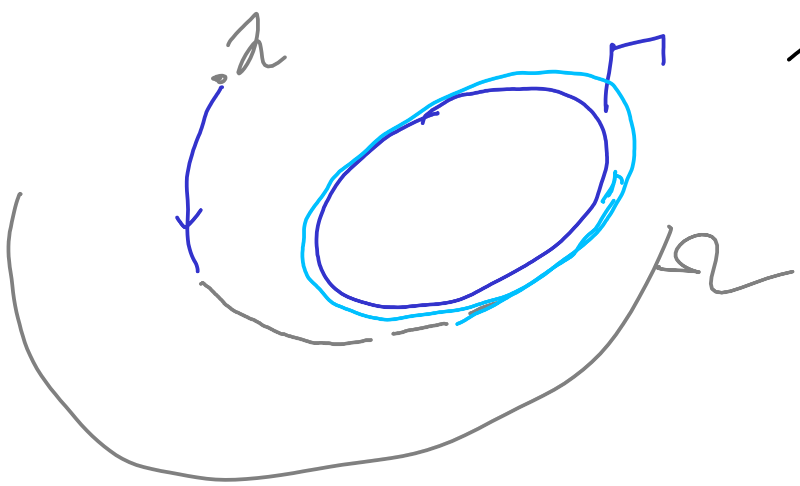
Ω_1 omez. („vnitřek")

Ω_2 neomez. („vnějšek")

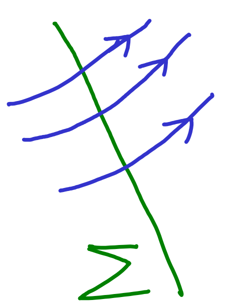
Věta 15.1 [Poincaré–Bendixson.]

nechť: $x \in \Omega$ je t.ž. $\overline{\gamma^+(x)}$ je kompaktní, $\omega(x)$ neobsahuje stacionární bod

Pak: $\omega(x) = \Gamma$, kde Γ je netriviální per. orbit.



Def. $\Sigma \subset \Omega$ se nazve transverzála, pokud Σ je segment (afinní křivka) t.ž. $\Sigma \not\parallel f(x)$ pro $\forall x \in \Sigma$



Zřejmé: $x_0 \in \Omega$ ne stacionární $\Rightarrow \exists$ transv. Σ t.ž. $x_0 \in \Sigma$

Lemma 15.1 Nechť $\Sigma \subset \Omega$ je transverzála, $y \in \Sigma$

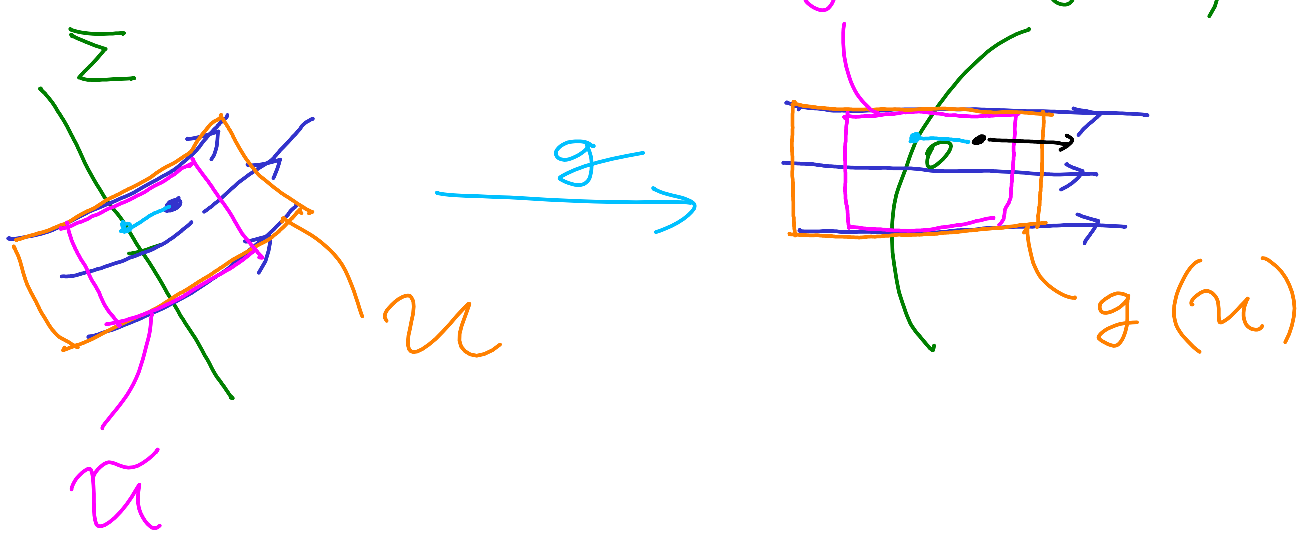
Pak: $\exists\, \tilde{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$ okolí y

$\exists\, \Delta > 0$ t.ž. $\forall x_0 \in \tilde{\mathcal{U}}$ platí

(i) $x(t) = \varphi(t, x_0) \in \mathcal{U} \quad \forall\, |t| < \Delta$

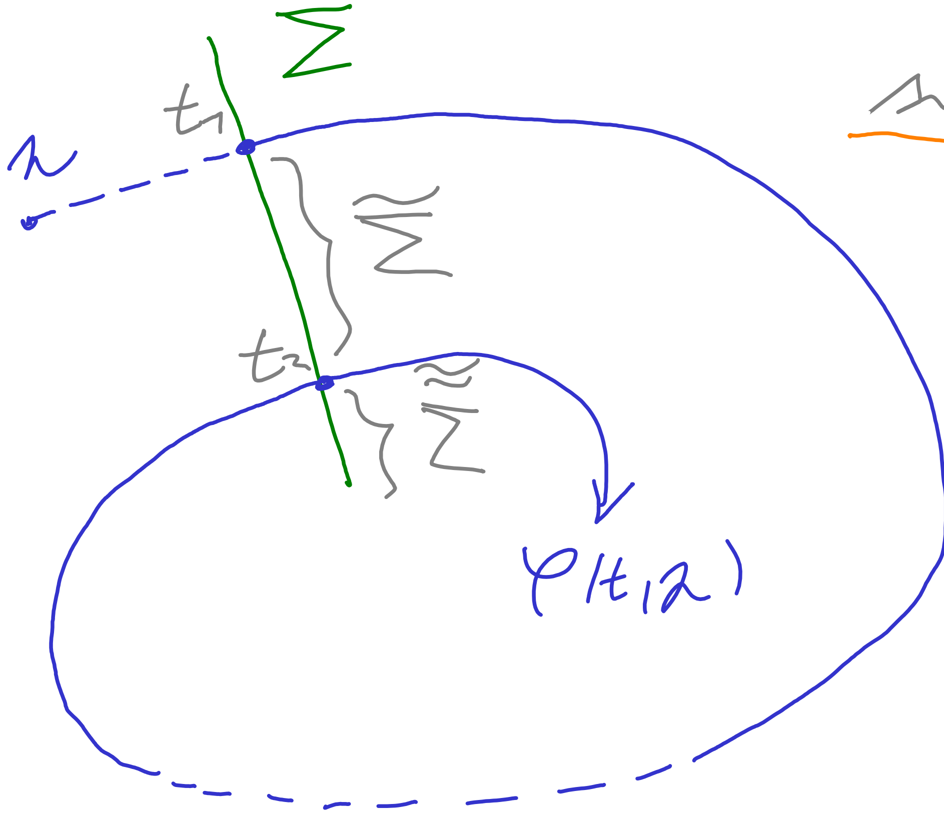
(ii) $\exists!\, \tilde{t},\ |\tilde{t}| < \frac{\Delta}{2}$ t.ž. $x(\tilde{t}) \in \Sigma \cap \tilde{\mathcal{U}}$

Dk.: Věta 13.3.



$\square$

Lemma 15.2 $\Sigma \subset \Omega$ transverzála, $x \in \Omega \Rightarrow \gamma^+(x) \cap \Sigma$ je monotónní posloupnost



(monotonie)

Sn*adíme*: pro $t > t_2$ lze protnout Σ pouze v $\tilde{\tilde{\Sigma}}$, ne v $\tilde{\Sigma}$

$\ast$) Klíč. poz.: $\gamma := \tilde{\Sigma} \cup \varphi([t_1, t_2], x)$ je Jordanova křivka.

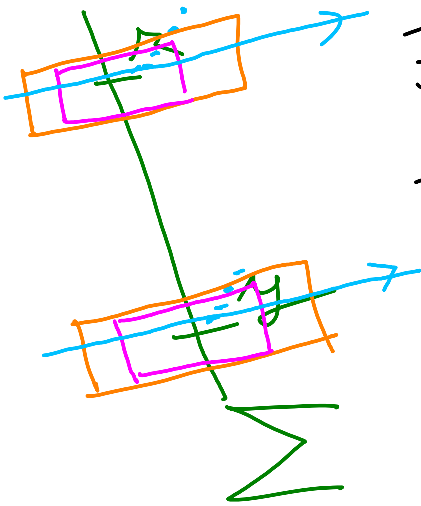
$\varphi(t,x)$, $t > t_2$ leží ve stejné (tj. vnitřní) komponentě $\Omega \setminus \gamma$.

$\square$

Lemma 15.3 $\Sigma \subset \Omega$ transverzála, $x \in \Omega$

$\Rightarrow$ $\omega(x) \cap \Sigma$ je nejvýše jednobodová

Dk: ?? $\exists\, y \neq z$ s.ž. $y, z \in \omega(x) \cap \Sigma$



$\exists\, t_k \to +\infty$ s.ž. $\underline{\varphi(t_k, x)} \to z$

$\exists\, s_k \to +\infty$ s.ž. $\underline{\varphi(s_k, x)} \to y$

L.15.1: $\exists\, \tilde{U} \subset U$ okolí z

$\tilde{V} \subset V$ okolí y

$\exists\, \Delta, \tilde{\Delta}$ s.ž.

BÚNO: $U \cap V = \emptyset$

$\Rightarrow$ musí $t_k < s_k < t_{k+1} < s_{k+1}$

$\Rightarrow$ $\exists\, \tilde{t}_k$ blízké t_k

$\tilde{s}_k$ blízké s_k

s.ž. $\varphi(\tilde{t}_k, x) \in \Sigma \cap \tilde{U}$

$\varphi(\tilde{s}_k, x) \in \Sigma \cap \tilde{V}$

↯ (L.15.2) $\square$

Dk. Věty 15.1 nel $q \in \omega(x) \neq \emptyset$

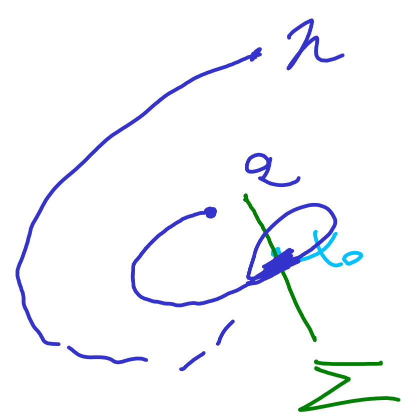
(V. 13.1)

KROK 1. Ukážeme: $q \in \Gamma$, kde Γ je (nekonst.) per. orbit

buď $x_0 \in \omega(q)$ libovolné

víme: $\gamma^+(q) \subseteq \omega(x)$

(V. 13.1, invariance)



$\Rightarrow$ $\omega(q) \subseteq \omega(x)$

$\ni$

x_0 není stacionární

$\Rightarrow$ $\exists$ transverz. Σ t.ž. $x_0 \in \Sigma$

$\exists\, t_k \to +\infty$ t.ž. $\varphi(t_k, q) \to x_0$

(neboť $x_0 \in \omega(q)$)

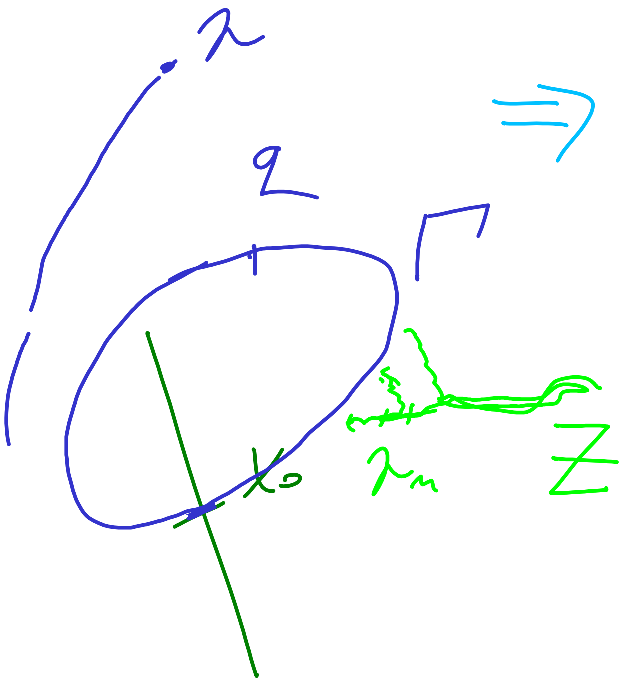
L. 15.1: $\exists\, \tilde{t}_k$ t.ž. $|t_k - \tilde{t}_k| < \Delta$

t.ž. $\varphi(\tilde{t}_k, q) := r_k \in \Sigma$

dk: $x_q \in \Sigma \cap \gamma^+(q) \cap \omega(x)$

L.15.3: $\Rightarrow$ $x_q = x_0$ pro $\forall q$ (volbě)

$\Rightarrow$ $\gamma^+(q) = \Gamma$ ... per. orbit (netriv.)



KROK 2: $\omega(x) \subset \Gamma := \gamma(q)$

?? $Z := \omega(x) \setminus \Gamma \neq \emptyset$

V.13.1 $\Rightarrow$ $\omega(x)$ souvislá, tj:

Γ a Z nejsou oddělené

$\exists x_n \in Z,\ x_n \to x_0 \in \Gamma$

BÚNO

x_0 ne stac. $\Rightarrow$ Σ souv. $x_0 \in \Sigma$

$\gamma_n \to x_0$

L. 15.1: $\underbrace{\gamma(\gamma_n)}_{\subseteq \omega(\gamma)} \cap \Sigma \cap \underline{\mathcal{U}}$

okolí x_0

L. 15.3: $\gamma(\gamma_n) \cap \Sigma = \{x_0\}$

tj. $Z \subset \gamma(x_0) = \Gamma$

$\lightning$ $\square$

Věta 15.2. [Bendixson–Dulac]

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je jednoduše souvislá,

$\exists\, B(x) : \Omega \to \mathbb{R}$ C^1 fce t.ž.

$\operatorname{div}(Bf)(x) > 0$ s.v. v Ω

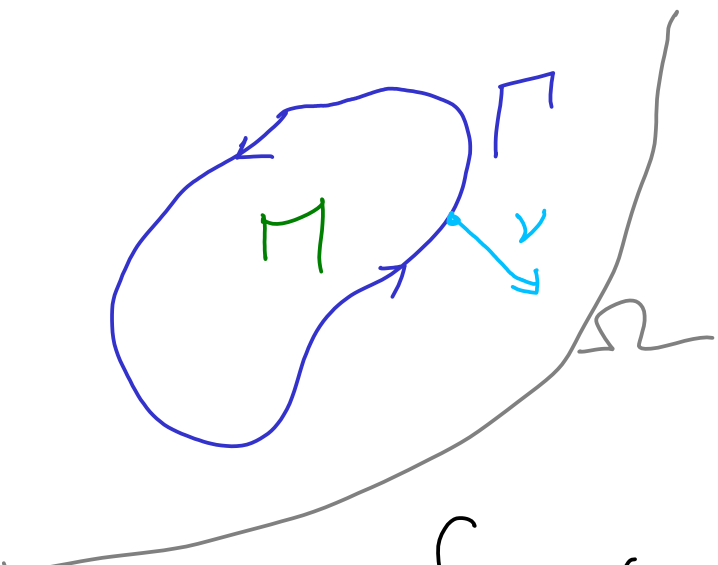
Pak (1) nemá v Ω (netriv.) per. řešení.

Pozn.: $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ jedn. souvislá $\Leftrightarrow$ $\forall \gamma \subset \Omega$ Jord. křivku lze spojitě stáhnout do bodu.

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}$$

$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Dk.: ?? $\exists\, \Gamma \subset \Omega$ netriv. jdn. orbita (1)



Gaussova věta:

LS > 0

PS $= 0$

$$\int_M \underbrace{\operatorname{div}(Bf)}_{>0 \text{ s.v.}} \, d\lambda_2 = \int_\Gamma \underbrace{(Bf \cdot \nu)}_{\equiv 0} \, dS$$

neboť: Γ je řešení

tj. tečna $f(x) \perp \nu$

$\square$