

8. První integrál

Def. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřený, $U = U(x): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá
první integrál ke (8.1) $x' = f(x)$ v Ω , jestliže:

1. $U \in C^1$, nekonzstantní v Ω
2. $t \mapsto U(x(t))$ konstantní pro $\forall x(t)$ řešení (8.1) v Ω

Pozn. geometricky: $x(t)$ jsou vřetnice U
fyzikálně: energie (hamiltonián)

Příkl. (1) $x'' + f(x) = 0 \leadsto U = \frac{1}{2}y^2 + F(x)$,
$$\begin{pmatrix} x' = y \\ y' = -f(x) \end{pmatrix} \quad \text{ kde } F = \int f dx$$

(2) $x' = ax + bxy$
 $y' = -cy + Dx y \leadsto \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{y(-c+Dx)}{x(a+by)}$
(dvorec-kříst)

$$\leadsto V = a \ln y - by + c \ln x - Dx.$$

$$(v \Omega = \{x > 0, y > 0\}).$$

Pozn. obecnou úlohu (1.1) $x' = f(x, t)$
 $x(t_0) = x_0$

lze přeredit vždy
na autonomní:
$$\begin{aligned} \tilde{x}' &= f(\tilde{x}, \tilde{t}), & \tilde{x}(0) &= x_0 \\ \tilde{t}' &= 1, & \tilde{t}(0) &= t_0 \end{aligned}$$

Věta 8.1 $\Omega \subset \mathbb{R}^{m+1}$ otevř., $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ spojitá
 $V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je C^1 .

Pak je ekvivalentní:

- (i) $t \mapsto V(x(t), t)$ je konst. pro $\forall x(t)$ řešení (1.1) v Ω
 (ii) $\frac{\partial}{\partial t} V(x, t) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial V}{\partial x_j}(x, t) \cdot f_j(x, t) = 0$ pro $\forall \text{ bod } (x, t) \in \Omega$

Značení.

$\dot{V}_f(x, t)$: celková derivace
 (dle V a lemmy (1.1))

$$\dot{V}_f = \frac{\partial}{\partial t} V + \sum_{j=1}^m \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j$$

ok. V. 8.1 pomocný výpočet: $x(t)$ řešení (1.1) v $\Omega \Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial t} V(x(t), t) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial V}{\partial x_j}(x(t), t) \cdot \underbrace{x_j'(t)}_{\substack{\parallel \\ f_j(x(t), t) \\ \text{dle (1.1)}}} + \frac{\partial V}{\partial t}(x(t), t)$$

↑
 složení
 C^1 fun

tedy celkem: $\frac{d}{dt} V(x(t), t) = \dot{V}_f(x(t), t), \forall t \in I$

(ii) $\Rightarrow$ (i): odsud zřejmé

(i) $\Rightarrow$ (ii): vol $(x_0, t_0) \in \Omega$ libovolné, zlem

Věta 7.1: $\exists x(t): I \rightarrow \mathbb{R}^m$ řešení (1.1) v Ω

1. ř. $x(t_0) = x_0, t_0 \in I$.

dle (i): $0 = \frac{d}{dt} V(x(t), t)$,

pro $t = t_0$: $0 = \dot{V}_f(x(t_0), t_0) = \dot{V}_f(x_0, t_0)$

Def. Funkce $U_1, \dots, U_s : U_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$ nazveme
nezvázané v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^n$, pokud jsou C^1
a matice $\left\{ \frac{\partial U_j}{\partial x_i}(x_0) \right\}_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, s}}$ má hodnost s .

Ekvivalentně: $\nabla U_j(x_0) \in \mathbb{R}^n$ jsou lineárně
nezvázané.

Pozn. $\exists$ nejvýše n fčí, nezvázaných v $x_0 \in \mathbb{R}^n$
 $f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \exists$ nejvýše $n-1$ prvních integr.
rovnic (8.1), nezvázaných v bodě x_0 .

Věta 8.2 [Smíšený řád.] Nechť $U_j, j=1, \dots, \underline{s}$, jsou
1-integroby (8.1), nezvázané v bodě x_0 . Pak lze snížit
počet rovnic na $n-s$, v oblasti U_{x_0} .

dk. buď $x(t) : I \rightarrow U_{x_0}$ řešením (8.1),
BÚNO $x(0) = x_0$.

částečnou
inverzi $U_j(x)$

níme: $U_j(x(t)) \equiv C_j, t \in I$

$\left\{ \frac{\partial U_j}{\partial x_i}(x_0) \right\} \dots$ má hodnost s ,

BÚNO: $\left\{ \frac{\partial U_j}{\partial x_i}(x_0) \right\}_{i,j=1}^s \in \mathbb{R}^{s \times s}$ regulární

pomeaně fč: $F : U_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}^s$

$x \mapsto (U_1(x) - C_1, \dots, U_s(x) - C_s)$.

$\forall IF: \exists \varphi_j \in C^1 \text{ a. r. (ne obsah } U_{x_0})$

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow x_j = \varphi_j(x_{j+1}, \dots, x_m)$$

redukcí:
(pro dané řešení')

$$x_j(t) = \varphi_j(x_{j+1}(t), \dots, x_m(t))$$

$\forall t$ blíže 0.

(8.1) ~~$x_1' = f_1(x_1, \dots, x_k, R)$~~

~~$x_2' = f_2(x_1, \dots, x_k, R)$~~

$x_{k+1}' = f_{k+1}(x_1, \dots, x_k, R)$

$x_m' = f_m(x_1, \dots, x_k, R)$

$[m-k]$ rovnice.

$$\boxed{\begin{matrix} R' \\ \sim \end{matrix} = \begin{matrix} g \\ \sim \end{matrix} \left(\begin{matrix} \varphi \\ \sim \end{matrix} (R), R \right)}$$

$$\begin{matrix} R \\ \sim \end{matrix} = (x_{k+1}, \dots, x_m)$$

$$\begin{matrix} g \\ \sim \end{matrix} = (f_{k+1}, \dots, f_m)$$

$$\begin{matrix} \varphi \\ \sim \end{matrix} = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$$

Příklad.

$$x'' + x = 0$$

$$\begin{pmatrix} x' = y \\ y' = -x \end{pmatrix}$$

(2nce)

$$\leadsto U = y^2 + x^2 \text{ - 1. integrál } \sim \mathbb{R}^2$$

$$x^2 + y^2 = c$$

$$y^2 = c - x^2$$

$$y = |x'| = \pm \sqrt{c - x^2}$$

(1nce)

Věta 8.3 Necht $f \in C^1(U_{x_0})$, $f(x_0) \neq 0$.

$\Rightarrow \exists U_1, \dots, U_{m-1} \dots$ 1. inseqeily (8.1),
ne okolí x_0 , nerěšitel v bodě x_0

Důk: BÚNO: $x_0 = 0$

$$f(0) = a \neq 0$$

... označ $\varphi = \varphi(t, t_0, x_0)$

... řešení fce (8.1) $x' = f(x)$
 $x(t_0) = x_0$

pomocná fce:

$\varphi \in C^1$ (Věty 4.2, 4.3).

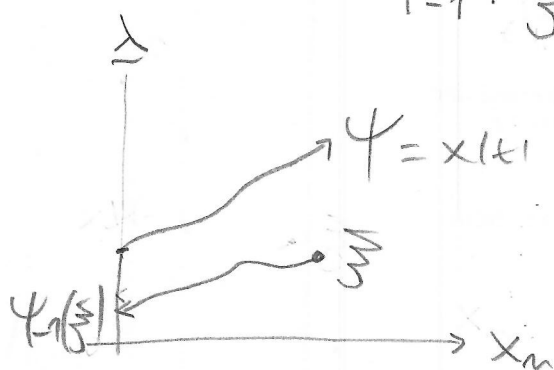
$$\Psi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$(t, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}) \mapsto \varphi(t, \overset{t_0}{0}, \underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, 0}_{x_0 \in \mathbb{R}^m})$$

Sndíme: Ψ lze invertovat (ne okolí 0)

$\Rightarrow$ jen lokál, neobč

$$\Psi^{-1}: \mathbb{R}^m \mapsto (t, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1})$$



uvážej počáteční podmínky,
tj. $[\Psi^{-1}(x(t))]_j, j=2, \dots, m-1$
(složky)

je konstantní podél $x(t)$
řešení (8.1) v okolí 0;

$$\text{neboli } \Psi^{-1}(\mathbb{R}^m) = (\underbrace{U_1(\mathbb{R}^m), U_2(\mathbb{R}^m), \dots, U_m(\mathbb{R}^m)}_{\substack{\uparrow \\ \text{1. inseqeily}}})$$

$\exists$ inverse $\Leftarrow \forall \text{ IF} : \psi(0) = \psi(0, 0, 0) = 0 \in \mathbb{R}^m$

$\psi \in C^1(\mathcal{U}_0) \Leftarrow$ hledat ψ

regularita $D\psi(0) : D = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \lambda_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \lambda_{m-1}} \right)$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(0) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(0) = f(\psi(0)) = (\dots, a)^T, a \neq 0.$$

$$t=0 : \psi(0, \underline{\lambda}) = (\underline{\lambda}, 0) = (\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, 0)$$

$$D_{\underline{\lambda}} \psi(0, \underline{\lambda}) = \begin{pmatrix} I \\ 0 \dots 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times (m-1)}$$

celkem: $D\psi(0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & & & 1 \\ \hline a & 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \dots$ regularita

Pozn.: tedy $D\psi_{-1}(0) = [D\psi(0)]^{-1}$ seš regularita

$\Downarrow$

nerozhodit složek:

$$[\psi_{-1}(\frac{x}{j})]_j, j=2, \dots, m$$

Pozn.: první integrál
(8.1) $x' = f(x)$

$\Leftrightarrow$

nerozhodit řešení

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \cdot f_j(x) = 0$$