5. Lineární rovnice

Def. Lineární rovnicí rozumíme

$$(5.1) \quad \begin{aligned} x' &= A(t)x + g(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

kde $A(t) : (a,b) \to \mathbb{R}^{n\times n}$

$g(t) : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ jsou spojité.

Věta 5.1 Nechť $t_0 \in (a,b)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ je dáno. Pak $\exists!$ řešení (5.1), definované na celém (a,b).

dk. položme: $f(x,t) = A(t)x + g(t)$

$$\Omega = \mathbb{R}^n \times (a,b)$$

zřejmě: $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je spojité

a také lokálně lipschitzovské vůči x:

$$|f(x,t) - f(y,t)| = |A(t)x - A(t)y|$$

$$= |A(t)(x-y)| \leq \underbrace{\|A(t)\|}_{\text{lokálně omezené (spojitost)}} \cdot |x-y|$$

Věty 3.1, 2.1 a 2.2 $\Rightarrow$ $\exists!$ maximální řešení $(x, (\alpha,\beta))$ v Ω.

zbývá: $(\alpha,\beta) = (a,b)$, tj. x je globální.

?? $\beta < b$ ... pomocné odhady:

$$|g(t)|, \|A(t)\| \leq C_1, \quad \forall t \in [t_0, \beta]$$

... spojité $\Rightarrow$ omezená na kompaktu

L. 1.1. $\Rightarrow$ $\quad x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} A(s)x(s) + g(s)\, ds$

$$|x(t)| \le \underbrace{|x(t_0)|}_{=\,|x_0|} + \int_{t_0}^{t} \underbrace{|A(s)\,x(s)|}_{\le\, \underbrace{\|A(s)\|}_{\le C_1}\cdot|x(s)|} + \underbrace{|g(s)|}_{\le C_1}\,ds$$

tedy celkem: $|x(t)| \le \underbrace{|x_0| + (t-t_0)C_1}_{\le C_2} + \int_{t_0}^{t} C_1|x(s)|\,ds$

$\forall t \in (t_0, \beta)$

Věta 4.1 (Gronwall) $\Rightarrow$ $|x(t)| \le C_2 \cdot \exp\left(C_1|t-t_0|\right)$

$\le C_2 \cdot \exp\left(C_1|\beta - t_0|\right) =: C_3$

pro $\forall t \in [t_0, \beta)$

tedy: $x(t)$ neopustí pro $t \in [t_0, \beta)$

kompakt $K = \{|x| \le C_3\} \times [t_0, \beta]$

SPOR s Větou 3.2.

Pozn. globální existence: stačil by předpoklad

$|f(x,t)| \le \alpha(t)|x| + \beta(t)$, $\alpha(\cdot), \beta(\cdot)$

spojité

Def. homogenní rovnice: (5.1) pro $g(t) \equiv 0$, tj.:

(5.2) $x' = A(t)x$.

Věta 5.2 Množina R_H řešení (5.2) tvoří podprostor dimenze $\underline{n}$ v $C^1((a,b); \mathbb{R}^n)$.

dk. fixuji $t_0 \in (a,b)$

definuji zobrazení $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow C^1(a,b;\mathbb{R}^n)$

$x_0 \longmapsto x(\cdot)$ … řešení (5.2) t.ž. $x(t_0) = x_0$

Věta 5.1 : Φ je 1-1 (prosté, na R_H)

navíc : Φ je $\underline{\text{lineární}}$: to zřejmé:

$x(t)$ řešení s z.z. $x(t_0) = x_0$

$y(t)$ –"– –"– $y(t_0) = y_0$

$\Rightarrow$ $\alpha x(t) + \beta y(t)$ je řešení s.z.z. $\alpha x_0 + \beta y_0$ v $t = t_0$.

Def. Fundamentální systém: báze (nějaká) R_H

Fundamentální matice (f.m.): matice, jejíž sloupce tvoří fundamentální systém.

Platí: Je-li $\phi(t)$ f.m., pak

- $\phi' = A(t)\phi$, tj. ϕ splňuje (5.2) maticově
- $\phi(t)$ je regulární pro $\forall t \in (a,b)$
- obecné řešení (5.2) je tvaru $\phi(t)c$, $c \in \mathbb{R}^n$
- $\tilde{\phi}(t) := \phi(t)\phi^{-1}(t_0)$ je též f.m., navíc $\tilde{\phi}(t_0) = I$.

Věta 5.3 [Variace konstant.] Nechť $\Phi(t)$ je f.m. (5.2). Pak řešení (5.1) lze napsat ve tvaru

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)g(s)\,ds, \quad t \in (a,b).$$

dk. TRIK: píšeme $x(t) = \Phi(t)c(t)$, kde $c(t) \in C^1(a,b;\mathbb{R}^n)$
(jistě lze: $c(t) = \Phi^{-1}(t)x(t)$ dobře definováno)

$$x'(t) = (\Phi(t)c(t))' = \Phi'(t)c(t) + \Phi(t)c'(t)$$
$$= A(t)\Phi(t)c(t) + \Phi(t)c'(t)$$

dosaď do (5.1): $x'(t) = A(t)x(t) + g(t)$

$$\cancel{A(t)\Phi(t)}c(t) + \Phi(t)c'(t) = \cancel{A(t)\Phi(t)}c(t) + g(t)$$

$$c'(t) = \Phi^{-1}(t)g(t)$$

$$c(t) = c(t_0) + \int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)g(s)\,ds$$

$t = t_0$: $x_0 = x(t_0) = \Phi(t_0)c(t_0)$

tj. $c(t_0) = \Phi^{-1}(t_0)x_0$.

celkem tedy: $$x(t) = \underbrace{\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0}_{\substack{\text{řeší (5.2)} \\ \text{s p.p.} \\ x(t_0) = x_0}} + \underbrace{\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)g(s)\,ds}_{\substack{\text{řeší (5.1) s p.p.} \\ x(t_0) = 0.}}$$

Věta 5.4 [Liouvilleova formule.] Nechť $\Phi(t)$ je maticové řešení (5.2), nechť $w(t) = \det \Phi(t)$. Pak

$$w(t) = w(t_0)\cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\,ds\right),$$ kde $\operatorname{tr} A$ je stopa A.

---

dk: cíl: vypočítat $w'(t) = (\det \Phi(t))'$

metoda: symbolika $o(h)$ „malé ó hé"

---

t .. pevné; (5.2) $\longrightarrow$ $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$, tj:

$$\Phi(t+h) = \Phi(t) + h A(t)\Phi(t) + o(h), \quad h\to 0$$
$$= \big(I + hA(t)\big)\Phi(t) + o(h).$$

---

tedy:
$$w(t+h) = \det \Phi(t+h)$$
$$= \det\left\{\big(I+hA(t)\big)\Phi(t) + o(h)\right\}$$
$$\overset{(i)}{=} \det\left\{\big(I+hA(t)\big)\Phi(t)\right\} + o(h)$$
$$\overset{(ii)}{=} \det\big(I+hA(t)\big)\cdot \underbrace{\det\Phi(t)}_{w(t)} + o(h)$$

užitím: (i) hladkost $\det$

(ii) vzorec $\det(MN) = \det M \cdot \det N$

zbývá: vypočíst $\det\big(I + hA(t)\big)$

$$\det(I+hA) = \begin{vmatrix} 1+ha_{11}, & ha_{12}, & ha_{13}, & \cdots \\ ha_{21}, & 1+ha_{22}, & & \cdots \\ ha_{31} & \vdots & & \\ \vdots & & & \end{vmatrix}$$

$$= (\text{hlavní diagonála}) + (\text{ostatní součiny})$$

aspoň 2 členy mimo hlavní diagonálu tj. aspoň h^2

$$= (1+ha_{11})\cdots(1+ha_{nn}) +$$

$$= 1 + h\underbrace{(a_{11}+\cdots+a_{nn})}_{\operatorname{tr} A.} + \underbrace{O(h^2)}_{\text{je } o(h)}$$

celkem tedy:

$$\det(I+hA(t)) = 1 + h \operatorname{tr} A(t) + o(h)$$

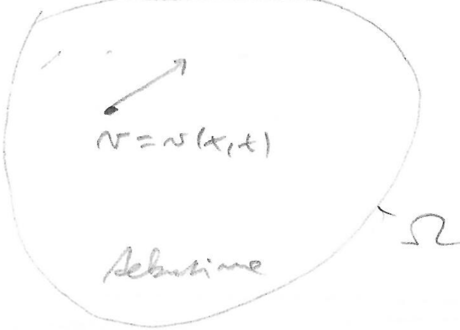
$$w(t+h) = (1 + h \operatorname{tr} A(t))\, w(t) + o(h)$$

$$= w(t) + h \operatorname{tr} A(t)\, w(t) + o(h),$$

neboli: $w'(t) = (\operatorname{tr} A(t))\, w(t)$, pro $\forall t$

integrace $\Rightarrow$ řešení

aplikace:

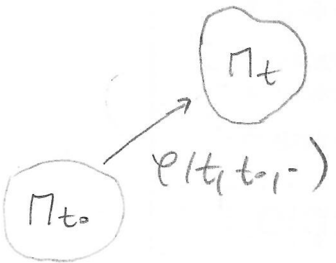


$$(1.1)\qquad x' = v(x,t), \quad x(t_0) = x_0$$

... řešící fce: $\varphi = \varphi(t, t_0, x_0)$

[Eulerovský popis] [Lagrangeovský popis].

pozorování: změna objemu (stlačitelnost)



$\Pi_{t_0} \subset \Omega$ ... kontrolní objem

$$\Pi_t = \{\varphi(t,t_0,x_0),\ x_0 \in \Pi_{t_0}\}.$$

$$\lambda(\Pi_t) = \int_{\Pi_t} 1\, dy_0 = \int_{\Pi_{t_0}} |\det \nabla_{x_0} \varphi(t,t_0,x_0)|\, dx_0$$

Věta o substituci: $\varphi(t,t_0,\cdot)$ je (aspoň lokálně) difeomorfismus, je-li v dost hladké

označ: $\Psi(t) = \Psi(t,t_0,x_0) = \nabla_{x_0} \varphi(t,t_0,x_0)$

$$\Psi' = \nabla_x v(\overset{\varphi(t,t_0,x_0)}{x(t)}, t)\, \Psi(t)$$
$$\Psi(t_0) = I.$$

$$\det \Psi(t) = \underbrace{\det \Psi(t_0)}_{=1} \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\, ds\right),$$

kde $A(t) = \nabla_x v(x(t), t)$

avšak: $\operatorname{tr} \nabla_x v = \operatorname{div} v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$

celkem tedy: $\lambda(\Omega_t) = \int_{\Omega_{t_0}} \exp\left(\int_{t_0}^{t} (\operatorname{div} v)(\underbrace{x(s)}_{= \varphi(s,t_0,x_0)}, s)\, ds \right) dx_0$

neboli $dy_0 = \left\{ \exp\left(\int_{t_0}^{t} (\operatorname{div} v)(\underbrace{x(s)}_{= \varphi(s,t_0,x_0)}, s)\, ds \right) \right\} dx_0$

dx_0 $\qquad$ $dy_0 = \varphi(t, t_0, x_0)$

neboli: zachování objemu (nestlačitelnost)

postačující (& též nutná)

podmínka: $\boxed{\operatorname{div} v = 0}$ $\forall (x,t)$