

2. Jednoznačnost řešení

Př. 1) $x' = f(t)$ řešení: $F(t) + C$, $\text{prim. } f \in C$
 $x(t_0) = x_0$ — má jediné — $(\infty \text{ mnoho})$

2) $x' = 3\sqrt[3]{x^2}$
 $x(0) = 0$ více řešení: $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$
 $x(t) = t^3, t \in \mathbb{R}$

Def. Rovnice (1.1) má v Ω vlastnost

(i) globální jednoznačnosti, pokud pro $\forall (x, I), (y, J)$ řešení v Ω a.ř. $\exists t_0 \in I \cap J: x(t_0) = y(t_0)$ znamená, že $x = y$ na $I \cap J$

(ii) lokální jednoznačnosti, pokud $\forall (x, I), (y, J)$ řešení v Ω a.ř. $\exists t_0 \in I \cap J, x(t_0) = y(t_0)$ znamená, že $\exists \delta > 0$ a.ř. $x = y$ na $I \cap J \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Věta 2.1 Ře má v Ω globální jednoznačnost, právě když má lokální jednoznačnost.

důk. " $\Rightarrow$ " jasně

" $\Leftarrow$ " — bud se $(x, I), (y, J)$ řešení, $x(t_0) = y(t_0)$
 pro jisté $t_0 \in (a, b) := I \cap J$.

označ $K = \{\tau \in [t_0, b); x = y \text{ na } [t_0, \tau]\}$

ukážeme, že $K = [t_0, b)$ — jasně hodnot,



(pokud ne: $x \neq y$ na $(\tau, t_0 + \epsilon)$)

porovni: $K \neq \emptyset \dots (t_0 \in K)$, shodě omezení (b)
 $t \in K \Rightarrow [t_0, t] \in K$, tj. K je interval

má ubírat: $\sup K = b \dots ??$ $c := \sup K < b$

(i) $\exists \tau_n \uparrow c, \tau_n \in K$, tedy $x = y$ na $[t_0, \tau_n]$

má jít $\Rightarrow x = y$ na $[t_0, c]$, tj. $c \in K$

(ii) lokální jednoznačnost: $\exists \delta > 0$ t.j. $x = y$
na $[c, c + \delta)$, tj.
 $c + \frac{\delta}{2} \in K \dots$ SPOR

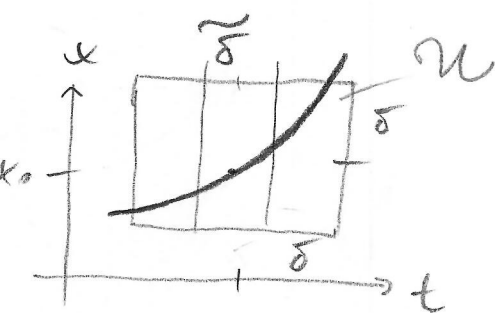
Def. Funkce f se nazývá lokálně lipschitzovská v Ω
návč x , jestliže: $\forall (x_0, t_0) \in \Omega \exists \delta, L > 0 \forall (x, t),$
 $(y, t) \in \mathcal{U}(x_0, \delta) \times \mathcal{U}(t_0, \delta): |f(x, t) - f(y, t)| \leq L|x - y|.$

Věta 2.2. Je-li f v Ω lok. lipsch. návč x , měřde
ne (1.1) lokální jednoznačnost.

dě. buďte $(x, I), (y, J)$ řešení, $x(t_0) = y(t_0) = x_0$.

$\dots \exists \delta, L > 0$ (vlastnost lok. lipsch.)

BUNO: $\tilde{\delta} > 0$ tak měřde $\text{graf } x, y|_{\mathcal{U}(t_0, \tilde{\delta})} \subset \mathcal{U}(x_0, \delta) \times \mathcal{U}(t_0, \delta).$



Dále, meřde $\tilde{\delta} \leq \frac{1}{2L}$

Jindíme: $x = y$ na $\mathcal{U}(t_0, \tilde{\delta})$

dě.: označme $z = \max_{t \in [t_0, t_0 + \tilde{\delta}]} |x(t) - y(t)|$

Lemma 1.1 $\Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds$ $\forall t$

analog: $y(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(y(s), s) ds$

$$\underbrace{|x(t) - y(t)|} \leq \left| \int_{t_0}^t \underbrace{f(x(s), s) - f(y(s), s)}_{|f(x(s), s) - f(y(s), s)| \leq L|x(s) - y(s)| \leq Lr} ds \right| \leq \underbrace{\tilde{\delta} \cdot Lr}$$

$\uparrow$
 $r = \sup_{t \in \mathcal{U}(t_0, \tilde{\delta})} |x(t) - y(t)|$

$$\Rightarrow r \leq \tilde{\delta} L \cdot r, \text{ tedy } r = 0.$$

$$\underbrace{r(1 - \tilde{\delta} L)}_{> 0} \leq 0$$

Def. $f \in C_x^1(\Omega) \dots \frac{\partial f}{\partial x_j} \exists$, spojité v Ω , pro $\forall j$.

Lemma 2.1. $f \in C_x^1(\Omega) \Rightarrow f$ je lokálně lipschitz-
 rozkoší vůči x v Ω .

dB. $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ spoj. $\Rightarrow$ omezené na kompaktní $\overline{U} \subset \Omega$,
 kde $U = \mathcal{U}(x_0, \Delta) \times \mathcal{U}(t_0, \delta)$,
 $(x_0, t_0) \in \Omega$ libovolné, $\Delta, \delta > 0$ malé

$(x, t), (y, t) \in U$... libovolné:

$$\begin{aligned} f(x, t) - f(y, t) &= \left[f(y + \theta(x - y), t) \right]_{\theta=0}^{\theta=1} = \int_0^1 \frac{d}{d\theta} [\dots] d\theta \\ &= \int_0^1 \sum_{j=1}^m \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_j}(y + \theta(x - y), t)}_{\in U} (x_j - y_j) d\theta \end{aligned}$$

$$|f(x, t) - f(y, t)| \leq \sum_{j=1}^m K |x_j - y_j| \leq mK |x - y|.$$