1. Existence řešení

obvyklé předpoklady

(1.1) $x' = f(x,t)$; $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřené, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojité.

$\Omega \ni (x,t)$

$x_j' = f_j(x_1, \dots x_n, t)$ $\qquad t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^n$ neznámé řešení.

Def. Řešení (1.1) v Ω :⇔ (dvojice) (x, I), kde $x(t) : I \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ ot. int.

a pro $\forall t \in I$: (i) $(x(t), t) \in \Omega$

(ii) $\exists$ vlastní $x'(t)$

(iii) $x'(t) = f(x(t), t)$

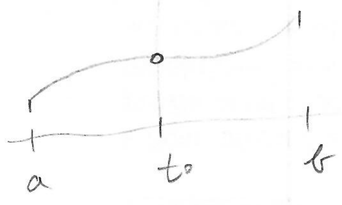
Pozn. 1) nutně $x \in C^1(I)$ … „klasické řešení"

Dk. dle (ii) : $t \mapsto x(t)$ spojité ;

$\Rightarrow t \mapsto f(x(t), t)$ spoj.

(iii) $\Rightarrow t \mapsto x'(t)$ spojité.

2) princip „lepení": $(x, (a, t_0))$, $(x, (t_0, b))$ řešení v Ω



$x(t)$ spojité v t_0 ; $(x(t_0), t_0) \in \Omega$

$\Rightarrow (x, (a, b))$ řešení v Ω

stačí ověřit: $\exists\, x'(t_0) = f(x(t_0), t_0)$.

věta z MA: $x'(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} x'(t)$

$x(t)$ spojité v t_0 ∧ limita má smysl znovu

$= \lim\limits_{t \to t_0} f(x(t), t) = f(x(t_0), t_0)$

spojitost

(1.1) na $P(t_0, \delta)$

$= (t_0 - \delta, t_0) \cup (t_0, t_0 + \delta)$

3) úvahy po složkách:

$x' = (x_1', \dots, x_n')$

$\int x = (\int x_1, \dots, \int x_n)$

$|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$

Lemma 1.1 [O integrální formulaci] $x : I \to \mathbb{R}^n$ spojité, $(x(t),t) \in \Omega$ pro $\forall t \in I$; $t_0 \in I$ pevné. PNTJE

1. (x, I) je řešení (1.1) v Ω, splňující $x(t_0) = x_0$
2. pro $\forall t \in I$ platí: $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s),s)\,ds$ $(*)$

---

dk. $1 \Rightarrow 2$: $t, t_0 \in I$ libovolné:

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} x'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} f(x(s),s)\,ds \quad ; \quad x(t_0) = x_0$$

$x \in C^1$, zákl. v. MA

(1.1) platí

-- $(*)$ platí

$2 \Rightarrow 1$: $(*)$ platí: volme $t = t_0 \Rightarrow x(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} \dots = x_0$

$$x'(t) = \frac{d}{dt}\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s),s)\,ds\right) = 0 + f(x(t),t).$$

zákl. věta MA

spojitý integrand;

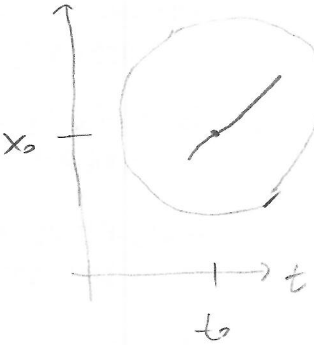
derivace dle horní meze.

Věta 1.1 [Peano 1890] $(x_0,t_0) \in \Omega$ libovolné $\Rightarrow \exists\, \delta > 0$,
$\exists\, x : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}^n$ řešení (1.1) v Ω, splňující $x(t_0) = x_0$.

dk. 1. krok: nechť $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$

$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojité, omezené.

tj. $|f(x,t)| \le C_0$, $\forall x, t$.



plán: aproxim. úlohy
odhady; konv. podposl.
limitní přechod...

BÚNO: $t_0 = 0$

aproximativní úloha (P_m) $x_m(t) = \begin{cases} x_0 \ ; & t \in [-\frac{1}{m}, 0] \\ x_0 + \int_0^t f(x_m(s-\frac{1}{m}), s)\, ds & \end{cases}$

$x_m : [-\frac{1}{m}, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ $t \in [0, +\infty)$

pozoruji: $\exists!$ řešení: indukcí:

$t \in [-\frac{1}{m}, 0] : x_m(t) \equiv x_0$ .. 1. řádek

$t \in [0, \frac{1}{m}]$: ... 2. řádek: k. 2. (klíčové pozorování)

integrand: $x_m(\underbrace{s-\frac{1}{m}}) = x_0$

$\in [-\frac{1}{m}, 0)$, neboť $s \in (0, t) \subset (0, \frac{1}{m})$

tj.: $(P_m) \Rightarrow x_m(t) = x_0 + \int_0^t f(x_0, s)\, ds \ ; t \in [0, \frac{1}{m}]$

:

$t \in [\frac{1}{m}, \frac{2}{m}]$ ... 2. řádek: $x_m(\underbrace{s-\frac{1}{m}})$ .. již máme..

$\in (0, \frac{1}{m})$

tj.: (P_m) je zároveň rekurentní předpis

---

2. krok: konvergence na $[0, T]$; $T > 0$ pevné.

tvrzení: $x_m(t)$ stejně omezené a stejně spojité na $[0, T]$.

$\Rightarrow$ $\exists$ podposl. $x_{m'}(t)$ a funkce $x(t)$ t. ž. $x_{m'}(t) \rightrightarrows x(t)$

Arzela-Ascoli v.

(Jarník; DII, V. 163, s. 327) na $[0, T]$.

dk.: • $x_m(t)$ stejně omezené: $\exists\ C_1$ t. ž. $|x_m(t)| \leq C_1 \quad \forall m \ \forall t \in (0, T)$

$(P_m)_2$: $|x_m(t)| = |x_0 + \int_0^t f(\dots)\, ds| \leq |x_0| + t\, C_0 \leq |x_0| + T C_0 =: C_1$

• stejně spojité: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |x_n(t_1) - x_n(t_2)| < \varepsilon$

$\forall t_1, t_2 \in [0, T] ; \forall n$

$$|x_n(t_1) - x_n(t_2)| = \left| x_0 + \int_0^{t_1} \dots - \left(x_0 + \int_0^{t_2} \dots\right)\right| = \left|\int_{t_2}^{t_1} f(\dots)\right|$$

$$\le |t_1 - t_2| \cdot C_0 \quad ; \text{ tj. } \varepsilon > 0 \text{ dáno: volme } \delta = \frac{\varepsilon}{C_0}$$

---

3. krok: přechod:

∃ podposl. $x_{n'}(t)$, ∃ $x_1(t)$ t.ž. $x_{n'}(t) \rightrightarrows x_1(t)$ na $[0,T]$

∃ podposl. $x_{n''}(t)$; ∃ $\tilde{x}_2(t)$ t.ž. $x_{n''}(t) \rightrightarrows \tilde{x}_2(t)$ na $[0,2T]$

diagonální výběr: nutně $\tilde{x}_1(t) = x_2(t)$ na $[0,T]$

∃ podposl. $x_n(t)$, ∃ fce $x(t)$ t.ž. $x_n(t) \rightrightarrows x(t)$ na $[0,kT]$ $\forall k \geq 1$ celé

speciálně: $x(t)$ spojité v $[0,+\infty)$ tj. $x_n \overset{loc}{\rightrightarrows} x$ $[0,+\infty)$.

přechod v (P_n): $x_n(0) \to x(0) = x_0$

$t > 0$ fixuji

$$x_n\left(s - \tfrac{1}{n}\right) = \underbrace{x_n\left(s - \tfrac{1}{n}\right) - x_n(s)}_{|\ \ | \le C_0\left(s - \frac{1}{n} - s\right) = C_0/n \to 0} + \underbrace{x_n(s)}_{\downarrow\ x(s)} \to x(s)$$

spojitost $x(t)$

$$\int_0^t f\left(x_n\left(s - \tfrac{1}{n}\right), s\right) ds \longrightarrow \int_0^t f(x(s), s)\, ds$$

Lebesgueova věta; majoranta: $|f(\dots)| \le C_0 \in L^1(0,t)$.

celkem: $x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s),s)\,ds$; $t \in [0,+\infty)$

analogické úvahy: najdu $x(t)$: $(-\infty, 0]$ t.ž. $\forall t \in R$

L. 1.1: $x(t)$ řeš. $(0,0)$

4. krok: $(x_0,t_0)\in\Omega$; $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ obecné

volme $\Delta>0$ t.ž. $\overline{\mathcal{U}((x_0,t_0),2\Delta)}\subset\Omega$

$\phi(x,t):\Omega\to\mathbb{R}$ spojité t.ž.

$\phi\equiv 1$ na $\mathcal{U}((x_0,t_0),\Delta)=\mathcal{U}_1$

$\equiv 0$ vně $\mathcal{U}((x_0,t_0),2\Delta)=\mathcal{U}_2$

polož: $\tilde f(x,t)=\begin{cases} f(x,t)\phi(x,t) ; & (x,t)\in\Omega\\ 0 & (x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus\Omega\end{cases}$

snadno ověříme: $\tilde f$ spojité na $\mathbb{R}^{n+1}$

omezené (na $\overline{\mathcal{U}_2}$ kompakt; 0 jinde)

$\tilde f = f$ na $\mathcal{U}_1$

dle 1-3 kroku: $\exists\ x(t)$ řešení $x'=\tilde f(x,t)$; $t\in\mathbb{R}$

$x(t_0)=x_0$

$x(t)$ spojité: $\exists\ \delta>0$ t.ž. $(x(t),t)\in\mathcal{U}_1$

pro $t\in(t_0-\delta,t_0+\delta)$

a tedy $x'(t)=\tilde f(x(t),t)=f(x(t),t)$

tj: $x(t)$ též řeší (1.1).