12. Floquetova teorie

problém: (12.1) $x' = A(t)x + b(t), \quad t \in \mathbb{R}$

kde $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b(t) \in \mathbb{R}^n$

jsou spojité, $\boxed{T\text{-periodické}}$ na $\mathbb{R}$

otázky:
- existence T-periodických řešení
- stabilita (asymptotická)

Poznámky: 1) $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ... dané, libovolné

$\Rightarrow \exists!$ (maximální) řešení $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$

s.t. $x(t_0) = x_0$ (viz Věta 5.1)

2) $x(t)$ řešení $\Rightarrow$ $y(t) := x(t+T)$ je též řešení

dk.) $y'(t) = x'(t+T) =$

$$= \underbrace{A(t+T)}\, x(t+T) + \underbrace{b(t+T)}$$

$$= A(t)\, y(t) + b(t).$$

3) pozorování (důležité!)

řešení $x(t)$ je T-periodické $\Leftrightarrow$ $x(T) = x(0)$

dk.: $\Rightarrow$ jasné

$\Leftarrow$ polož $y(t) := x(t+T)$

dle 2) je $y(t)$ též řešení

leč $y(0) = x(T) = x(0)$, tedy

$y(t) \equiv x(t)$ (jednoznačnost!)

Příkl. $x' = a(t)x$, $a(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ .. T-periodické

... obecné řešení: $x(t) = x_0 \exp\left(\int_0^t a(s)\,ds\right)$

T-periodické: $x(T) = x(0)$

$\Leftrightarrow x_0 = 0$ (triviální),

nebo $\int_0^T a(s)\,ds = 0$.

Lemma 12.1 Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je regulární.
Pak $\exists B$ (obecně v $\mathbb{C}^{n\times n}$, nejediné) t.ž. $e^B = A$.

Dk.: viz cvičení.

Věta 12.1 [Floquetova] Nechť $\Phi(t)$ je f.m. soustavy (12.1), nechť navíc $\Phi(0) = I$. Pak $\exists$ $Q(t)$ .. spojité, regulární, T-periodické matice a B .. konstantní matice t.ž. $\Phi(t) = Q(t)e^{tB}$.

Dk.: polož $C := \Phi(T)$ – regulární matice
L.12.1. $\Rightarrow \exists \tilde{B}$ t.ž. $C = e^{\tilde{B}}$ ... polož

$$\boxed{\begin{aligned} B &:= \tfrac{1}{T}\tilde{B} \\ Q(t) &:= \Phi(t)e^{-tB}. \end{aligned}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\Phi(t) = Q(t)e^{tB}$$

zřejmě $Q(t)$ je spojité,

je T-periodické?

úvahy: • $\Psi(t) := \Phi(t+T)$ je též f.m., neboť řeší $\Psi' = A(t)\Psi$, viz Poznámka 2) výše.

$\Psi(0) = \Phi(T) = C$, a tedy $\Psi(t) = \Phi(t)C$, neboli $\Phi(t+T) = \Phi(t)C$, pro $\forall t$

• dále platí: $e^{TB} = e^{T \cdot \frac{1}{T}\tilde{B}} = C$.

odtud máme: $Q(t+T) = \Phi(t+T)\, e^{-(t+T)B}$

$$= \Phi(t)C \underbrace{e^{-TB}}_{C^{-1}} e^{-tB} = Q(t).$$

Pozn.: 1) zapsáno jinak: tzv. Floquetova transf.

$y(t) := \underbrace{Q^{-1}(t)}_{\text{sezónní (periodická) dynamika}} x(t)$ převádí $x' = A(t)x$ na $\underbrace{y' = By}_{\text{globální (celková) dynamika}}$

Příkl. $x' = a(t)x$, $a(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ .. T-periodická

.. $\Phi(t) = \exp\left(\int_0^t a(s)\,ds\right)$

$C = \exp\left(\int_0^T a(s)\,ds\right)$

$B = \frac{1}{T}\int_0^T a(s)\,ds$, $Q(t) = \exp\left(\int_0^t a(s)\,ds - \frac{t}{T}\int_0^T a(s)\,ds\right)$.

Def. $C := \Phi(T)$ se nazývá matice monodromie soustavy (12.1).

Pozn.: C ... reprezentuje "řešící fci" za čas periody; obsahuje (v jistém smyslu) všechny informace o (12.1).

Věta 12.2. Nechť $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je spojité, T-periodické. Nechť C je matice monodromie. Pak je ekvivalentní:

(i) rce (12.1) má pro každé T-periodické $b(t)$ právě jedno T-periodické řešení

(ii) rce (12.2) $x' = A(t)x$ má pouze triviální T-periodické řešení

(iii) $1 \notin \sigma(C)$.

Dk.: (i) $\Rightarrow$ (ii) ... jasné

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) ... $x(t) = \Phi(t)x_0$ ... obecné řešení (12.2),

víme: $x(t)$ je T-periodické $\Leftrightarrow$ $x(T) = x(0)$

$$\underbrace{\Phi(T)}_{= C} x_0 = x_0$$

tj. $\boxed{(C-I)x_0 = 0}$.

$\exists x_0 \neq 0$ právě když $(C-I)$ regulární

(iii) $\Rightarrow$ (i) : užiji variaci konstant (Věta 5.3)

$$(12.1) \iff x(t) = \Phi(t)\left(x_0 + \int_0^t \Phi^{-1}(s) b(s)\, ds\right) ; x(0) = x_0$$

obecné řešení; je T-periodické?

$x(T) = x(0)$; tj.

$$\underbrace{\Phi(T)}_{C}\left(x_0 + \int_0^T \Phi^{-1}(s) b(s)\, ds\right) = x_0$$

$$(C - I)x_0 = -C\int_0^T \Phi^{-1}(s) b(s)\, ds$$

$\Rightarrow$ $x_0 \in \mathbb{R}^n$ určeno jednoznačně

(neboť $1 \notin \sigma(C)$).

Věta 12.3 [O stabilitě per. rovnic.] Je dána rovnice

(12.2) $x' = A(t)x$, kde $A(t)$ je spojité, T-periodické.

Nechť C je matice monodromie. Pak nulové řešení je:

(i) stabilní $\iff$ $|\lambda| \leq 1$ pro $\forall \lambda \in \sigma(C)$, a navíc

$|\lambda| = 1$ jen pro polojednoduché vlastní čísla

(ii) asymptoticky stabilní

$\iff |\lambda| < 1$ pro $\forall \lambda \in \sigma(C)$

Dk.: buď $\Phi(t)$ f. m.; dle Věty 7.1:

stabilita $\iff$ $\|\Phi(t)\|$ omezené, $t \to +\infty$

asympt. st. $\iff$ $\|\Phi(t)\| \to 0$, " —

Věta 12.1.: $\Phi(t) = Q(t)\, e^{tB}$, $Q(t)$ … per.

$e^{TB} = C$

TRIK: pišme $\boxed{t = nT + \tau}$, $n \geq 0$ celé, $\tau \in [0, T)$

$$\Phi(t) = \underbrace{Q(nT+\tau)}_{Q(\tau)} \underbrace{e^{nTB}}_{C^n} e^{\tau B}$$

zřejmě: $\|Q(\tau)\|$, $\|Q(\tau)^{-1}\|$

$\|e^{\tau B}\|$, $\|e^{-\tau B}\|$ … omezené

$\Rightarrow$ klíčový odhad: $c_1 \|C^n\| \leq \|\Phi(t)\| \leq c_2 \|C^n\|$

kde $c_1, c_2 > 0$ nezávisí na $t \geq 0$.

odtud: stabilita $\iff$ $\|C^n\|$ omezené, $n \to \infty$

asym. st. $\iff$ $\|C^n\| \to 0$, " —

BÚNO: stačí uvažovat Jordanovy buňky
(podobně jako ve Větě 7.2)

$$J = \lambda I + L; \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \boxed{m \times m}$$

$$J^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} L^k \lambda^{n-k} = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n}{k} L^k \lambda^{n-k}$$

(... BÚNO $n \geq m$,
lze užít binomickou
větu, neboť I, L komutují)

$$J^n = \lambda^n I + n \lambda^{n-1} L + \frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} L^2 + \cdots + \binom{n}{m-1} \lambda^{n-m+1} L^{m-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda^n \end{pmatrix}$$

zřejmě tedy: $J^n \to 0 \iff |\lambda| < 1$

J^n omez. $\iff |\lambda| < 1$ nebo
$|\lambda| = 1,\ m = 1.$