

Věta 10.1. [Ljapunov č. 1] Necht (1.1) má Ljap.

je pro bod $O \Rightarrow$ nulové řešení je stabilní.

důk.: $t_0 \in I, \varepsilon > 0$ dáme: $? \exists \delta > 0$ takové, že:

$$|x(t_0)| < \delta \Rightarrow |x(t)| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0,$$

a seř. $x(t)$ je definováno

(což maximální řešení)

BUNO: $S_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = \varepsilon\} \subset O$

ovšem $\alpha = \min \{ \omega(x); x \in S_\varepsilon \}$... musíme $\alpha > 0$, neboť

$\omega > 0$ na S_ε

(α minimum se neděje)

$V(0, t_0) = 0$, spojitost $\Rightarrow \exists \delta > 0$ t.j. $\delta \in (0, \varepsilon)$,

$$V(x_0, t_0) < \alpha \text{ pro } \forall |x_0| < \delta$$

hned najde $x(t)$... lišící (maximální) řešení t.j.

$$|x(t_0)| < \delta, t \in [t_0, \beta).$$

ukážeme: $|x(t)| < \varepsilon$ pro $\forall t$

?? hleď $t_1 > t_0$ nejmenší t.j. $|x(t_1)| = \varepsilon$,

tedy $x(t) \in U(0, \varepsilon) \subset O$ pro $\forall t \in [t_0, t_1)$

dle (ii) $t \mapsto V(x(t), t)$ je neustupující, a tedy

$$\alpha > V(x(t_0), t_0) \geq V(x(t), t) \geq \omega(x(t)), \forall t < t_1$$

$$\Rightarrow \alpha > V(x(t_0), t_0) \geq \omega(x(t_1)) \geq \alpha \quad \text{— SPOR}$$

$\uparrow$
 S_ε

sedg $|x(t)| < \varepsilon$ pro $\forall t \in [t_0, \beta)$;

$\Rightarrow$ musíme $\beta = +\infty$, neboť

maximální čas existence

pro $\beta < +\infty$ $(x(t), t)$ nepůjde $\mathcal{K} = \overline{U(0, \varepsilon)} \times [t_0, \beta]$

konverovat, por
o větou 3.2

Lemema 10.1. Necht $\omega(x): \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ je poz. def.,

necht $x_n \in \overline{U(0, \varepsilon)} \subset \mathcal{O}$. Pak $\omega(x_n) \rightarrow 0 \Rightarrow x_n \rightarrow 0$.

zk: spor: ?? $x_n \not\rightarrow 0$, tj. $\exists \Delta > 0$

$\exists \tilde{x}_n$ podpod. 4. ř.

$|\tilde{x}_n| \geq \Delta$, pro $\forall n$

a sedg $\omega(\tilde{x}_n) \geq \beta = \min \{ \omega(x); \Delta \leq |x| \leq \varepsilon \}$

leč $\beta > 0$ (viz $\alpha > 0$, v. eto 10.1)

SPOR.

Pozn.: Ještěcky sedg $x_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow \omega(x_n) \rightarrow 0$,

pro $\forall$ pod. $\{x_n\} \subset \overline{U(0, \varepsilon)} \subset \mathcal{O}$.

Věta 10.2. [Ljapunov č. 2] Nechť (1.1) má Ljap.

pro $V(x, t)$ pro bod 0, nechť navíc $\exists \lambda, \gamma$ poz. def.

(iv) $V(x, t) \leq \lambda(t)$, pro $\forall (x, t) \in O \times I$

(v) $\frac{d}{dt}V(x(t), t) \leq -\gamma(x(t))$, pro $\forall x(t)$ řešení
v $O \times I$.

Pak 0 je asymptoticky stabilní.

Důk: pro $t_0 \in I$, $\varepsilon > 0$ l.ř. $\overline{U(0, \varepsilon)} \subset O$

0 stabilní (Věta 10.1) $\Rightarrow \exists \delta > 0$ l.ř.

$$|x(t)| < \varepsilon, \text{ pro } \forall t \geq t_0$$

ukážeme: $x(t) \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$ (tj. 0 je lokálně
atraktivní, přímá hodnota)

dle (v) $V(x(t), t) - V(x(t_0), t_0) = \int_{t_0}^t \frac{d}{ds} V(x(s), s) ds$

$$\leq - \int_{t_0}^t \gamma(x(s)) ds$$

tj. $\int_{t_0}^t \gamma(x(s)) ds \leq \underbrace{V(x(t_0), t_0)}_{\substack{\uparrow \\ \text{máximální hodnotě}}} - \underbrace{V(x(t), t)}_{\geq 0}, \forall t \geq t_0$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{+\infty} \gamma(x(s)) ds < +\infty, \text{ a tedy } \exists t_n \rightarrow +\infty$$

l.ř. $\gamma(x(t_n)) \rightarrow 0$

(obecně $\gamma(x(t)) \rightarrow 0$ neplatí)

L. 10.1

$$\text{ij. } \gamma(x(t_n)) \rightarrow 0 \Rightarrow x(t_n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

dle: $t \mapsto V(x(t), t)$ je nerostoucí, ≥ 0

$$\Rightarrow \exists \lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t), t) = a \geq 0.$$

$$\text{dle (iv): } \lambda(x(t_n)) \geq V(x(t_n), t_n) \geq 0$$

$\underbrace{}_{\downarrow}$

$$\lambda(0) = 0$$

$$\Rightarrow V(x(t_n), t_n) \rightarrow 0,$$

$$\text{a tedy } a = 0$$

končně tedy: máme $V(x(t), t) \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$

$$\text{dle (iii) } V(x(t), t) \geq \omega(x(t)) \geq 0$$

$$\text{a tedy } \omega(x(t)) \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$$

pot dle L. 10.1 $\Rightarrow x(t) \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$
(+ Kleiného věty)

Věta 10.3 Je dále ne $x' = Ax$, kde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Potom je ekvivalentní:

1. 0 je asymptoticky stabilní
2. $\operatorname{Re} \lambda < 0$ pro $\forall \lambda \in \sigma(A)$
3. $\exists \alpha, C > 0$ t.j. $\|e^{tA}\| \leq C e^{-\alpha t}$, $t \geq 0$
4. $\exists B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symetrické, pozitivně def.
t.j. $A^T B + B A = -I$

(srov. Lyapunovova rovnice)

Důk.: $1. \Leftrightarrow 2. \Leftrightarrow 3.$ — již víme: Věta 7.2
(a její důkaz)

$3. \Rightarrow 4.$ položí

$$B := \int_0^{+\infty} e^{tA^T} e^t A dt$$

ověřím: $B^T = B$ (neboť T komutuje s $\int$, e^t)

$y \neq 0 \Rightarrow B y \cdot y > 0$ (poz. def.)

$$B y \cdot y = \left(\int_0^{+\infty} e^{tA^T} e^t A dt \right) \cdot y = \int_0^{+\infty} \left(e^{tA^T} e^t A y \right) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{tA} y \cdot \left(e^{tA^T} \right)^T y dt > 0, \text{ pro } y \neq 0$$

$$\underbrace{\left| e^{tA} y \right|^2}_{\neq 0}$$

Ljapunovova rovnice:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} e^{tA^T} & e^{tA} \end{bmatrix}_{t=0}^{t=+\infty} &= 0 - I = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} e^{tA^T} & e^{tA} \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \begin{pmatrix} A^T e^{tA^T} & e^{tA^T} A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{tA^T} A & A e^{tA} \end{pmatrix} dt \\ &= A^T B + B A. \end{aligned}$$

Pozn: odhad $\|e^{tA}\| \leq c e^{-\alpha t}$, $t \geq 0 \Rightarrow$ convergence
integrálu, etc.

idea: $|y|_* = \int_0^{+\infty} |e^{tA} y| dt \dots$ norma, klasická
model řešení $x' = Ax$
 $B y \cdot y = |y|_*^2 \dots$ $\left(\frac{d}{dt} |x(t)|_* \leq -c |x(t)|_* \right)$

4. $\Rightarrow$ 1. dokážeme asympt. stab. pro $x' = Ax + n(x)$,
kde $\frac{n(x)}{|x|} \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$ (viz. nová důkaz Věty 7.3)

polož $V(x) := Bx \cdot x \dots$ Ljapunovská fce!!

ověření: $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ pro $x \neq 0$

(Věta 10.2) dokonce $\lambda |x|^2 \leq V(x) \leq \Lambda |x|^2$,

kde $\lambda = \min \sigma(B)$

$\Lambda = \max \sigma(B)$

$\dots B$ pozitivně definitní

olisehul derivate: (de $f(x) = Ax + n(t)$)

$$\dot{V}(x) = DV(x) \cdot f(x) = (B f(x)) \cdot x + Bx \cdot f(x)$$

$$= B(Ax + n(t)) \cdot x + Bx \cdot (Ax + n(t))$$

$$= \underbrace{BAx \cdot x + Bx \cdot Ax}_{(BA + A^T B)x \cdot x} + \underbrace{Bn(t) \cdot x + Bx \cdot n(t)}_{\leq \|B\| \cdot |n(t)| \cdot |x|}$$

$$(BA + A^T B)x \cdot x$$

$$\leq \|B\| \cdot |n(t)| \cdot |x|$$

$$= -|x|^2$$

$$\leq \frac{1}{2}|x|^2, |x| \leq \Delta$$

$$\Rightarrow \dot{V}(x) \leq -\frac{1}{2}|x|^2; \quad \eta(x) = \frac{1}{2}|x|^2 \text{ -- poz. def.}$$

olisehul derivate - jimek:

$$\frac{d}{dt} V(x) = \frac{d}{dt} (Bx \cdot x) = Bx' \cdot x + Bx \cdot x'$$

$$= B(Ax + n(t)) \cdot x + Bx \cdot (Ax + n(t))$$

$$= \dots \text{etc.}$$