27. Distribuce

distribuce = zobecněné funkce

funkce : $x \mapsto f(x)$; číslu přiřadí číslo

f, g funkce : $f = g$ pokud $f(x) = g(x)$ $\forall x$

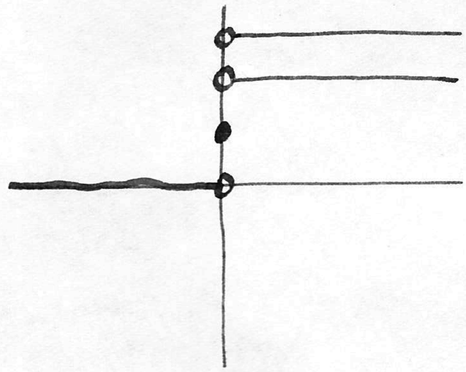
třídy funkcí C, C^1, L^1 : $f = g \Leftarrow f(x) = g(x)$ pro s.v. x

Dirac $\delta(x)$

$$\int_\Omega \delta(x)\,dx = \begin{cases} 1 & ; 0 \in \Omega \\ 0 & ; 0 \notin \Omega \end{cases}$$

derivace $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[f(x+h) - f(x)\right]$$

mějme
$$h_1(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \frac{1}{2} & ; x = 0 \\ 1 & ; x > 0 \end{cases}$$



$$h_2(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \frac{1}{2} & ; x = 0 \\ 1{,}2 & ; x > 0 \end{cases}$$

$$h_1' = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$$

$h_1' = h_2' \not\Rightarrow h_1 - h_2 \equiv$ konst. , což by ale bylo žádoucí

$\delta(x)$ ... $$\int_R f(x+y)\delta(y)\,dy = f(x)$$

distribuce je „funkce" $T(x)$ určující číslo ve smyslu

$$\varphi \mapsto \int T(x)\varphi(x)\,dx$$

Def: Nosič funkce $\operatorname{supp} := \overline{\{x;\, f(x) \neq 0\}}$ // uzávěr; jako support

Def: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ oblast (tj. otevřená, souvislá) v $\mathbb{R}^2$, prostor testovacích funkcí

$$\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega) = \{f: \Omega \to \mathbb{R};\ C^\infty;\ \operatorname{supp} f = K \subset \Omega;\ K \text{ kompaktní}\}$$

$K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktní $\Rightarrow$ K omezená & uzavřená

Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$; $\alpha_j \geq 0$ celé

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad ; \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

Def: [Konvergence v $\mathcal{D}(\Omega)$]

Nechť $\varphi_n, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Řekneme, že $\varphi_n \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega)$, jestliže

(i) $\exists K \subset \Omega$ kompaktní, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$ pro $\forall n \geq n_0$

(ii) $D^\alpha \varphi_n \rightrightarrows 0$ v K pro $\forall \alpha$ multiindex

Řekneme, že $\varphi_n \to \varphi$ v $\mathcal{D}(\Omega)$, jestliže $\varphi_n - \varphi \to 0$ ve smyslu předchozí definice

Značení: $\|\varphi\|_{C^k(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \max_{|\alpha| \leq k} \{|D^\alpha \varphi(x)|\}$

norma stejnoměrné konvergence:

$$\|\varphi_n\|_{C^k(\Omega)} \to 0 \iff D^\alpha \varphi_n \rightrightarrows 0 \text{ v } \Omega \quad \forall |\alpha| \leq k$$

Pozn.: $\varphi \in C^\infty(\Omega) \not\Rightarrow \|\varphi\|_{C^k(\Omega)} < \infty$

– problém u hranice: $\frac{1}{x} \in C^\infty((0,\infty))$

avšak $\|\frac{1}{x}\|_{C^0((0,\infty))} = \sup_{x>0} \{\frac{1}{x}\} = \infty$

- $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow \|\varphi\|_{C^k(\Omega)} < \infty \quad \forall k$

$K = \operatorname{supp} \varphi \dots D^\alpha \varphi(x)$ — 0 mimo K; omezené v K (spojité na kompaktu)

• $\varphi_n \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow \|\varphi_n\|_{C^k(\Omega)} \to 0 \ \forall k$

$$\not\Leftarrow$$

dokonce: konvergence v $\mathcal{D}(\Omega)$ není vyjádřitelná pomocí žádné normy ani metriky

Def: Distribucí v Ω, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, rozumíme spojitý lineární funkcionál

$$T: \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$\varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle$$

Tj. požadujeme: (i) $\langle T, a\varphi \rangle = a \langle T, \varphi \rangle$

$$\langle T, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = \langle T, \varphi_1 \rangle + \langle T, \varphi_2 \rangle$$
$$\forall a \in \mathbb{R},\ \varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$$

(ii) $\varphi_n \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow \langle T, \varphi_n \rangle = 0$

Značení: $\mathcal{D}'(\Omega)$ ... prostor distribucí v Ω

$\langle T, \varphi \rangle$ ... hodnota distribuce T na testovací fci φ

Příkl. ① $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{ f(x): \Omega \to \mathbb{R} \text{ měřitelné};\ \int_K |f(x)|\, dx < \infty \text{ pro } \forall K \subset \Omega \text{ kompaktní} \}$$

Pro $f(x) \in L^1_{loc}(\Omega)$ definuji $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ předpisem

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int_\Omega f(x) \varphi(x)\, dx$$

„regulární distribuce s hustotou f"

? $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ linearita: jasné (d.cv.)

spojitost:

$\varphi_n \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega)$; $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$ ... kompakt

$$|\langle T_f, \varphi_n \rangle| \le \int_\Omega |f(x) \varphi_n(x)|\, dx = \int_K |f(x)| \underbrace{|\varphi_n(x)|}_{\le \|\varphi_n\|_{C^0(\Omega)}} dx$$

$$\le \left(\int_K f(x)\, dx \right) \cdot \|\varphi_n\|_{C^0(\Omega)} \to 0$$

(2) Dirac : $a \in \Omega \ldots \delta_a \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle := \varphi(a)$$

(3) Dirac na sféře : $\delta_{S_r} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$

$$\langle \delta_{S_r}, \varphi \rangle := \int_{S_r} \varphi(x)\, dS(x)$$ plošný integrál 1. druhu

$$S_r = \{ x \in \mathbb{R}^n ;\ |x| = r \}$$

Pozn.: Lemma 16.2. (o slabé formulaci)

$$f(x) \in C((a,b)) \text{ a } \int_a^b f(x)\varphi(x)\, dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}((a,b)) \quad \left(\mathcal{D}((a,b)) = C_c^\infty((a,b))\right)$$

$$\Rightarrow f(x) \equiv 0 \text{ v } (a,b)$$

Lemma 16.2.' $\left.\begin{array}{l} f(x) \in L^1_{loc}(\Omega) \\ \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = 0$ s.v. v Ω

Důsledek: ~~vložení~~ vnoření $L^1_{loc}(\Omega)$ „$\subset$" $\mathcal{D}'(\Omega)$ je prosté

tj. $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$; $T_f = T_g \Rightarrow f(x) = g(x)$ s.v.

$T_f = T_g$ ve smyslu $\mathcal{D}'(\Omega)$

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \langle T_g, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$ $f(x) - g(x) = 0$ s.v. L. 16.2.'

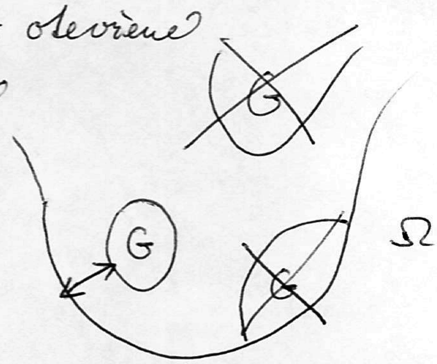
$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx = \int_\Omega g(x)\varphi(x) dx \quad \text{tj.} \int_\Omega [f(x) - g(x)]\varphi(x) dx = 0 \ \forall \varphi$$

Pozn.: Obecněji: každá „rozumná" míra určuje distribuci

$$\langle T_\mu, \varphi \rangle := \int_\Omega \varphi(x)\, d\mu(x)$$

rozumná: – spojité funkce jsou měřitelné
– $\mu(K) < \infty$ pro $\forall K$ kompaktní

Značení: $G \subset\subset \Omega$; Ω, G otevřené
(i) $\overline{G}$ je kompaktní
(ii) $\overline{G} \subset \Omega$
(striktně)



Věta 27.1. [O lokálně konečném řádu distribucí]
Nechť $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, nechť $G \subset\subset \Omega$; Ω, G otevřené
Pak existují čísla $K > 0$ a $m \geq 0$ celé tak, že

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq K \|\varphi\|_{C^m(G)} \quad \text{pro } \forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$$

DK.: sporem: nechť taková K, m neexistují
tj. $\forall k \in \mathbb{N} \ \exists \varphi_k \in \mathcal{D}(G) : |\langle T, \varphi_k \rangle| > k \|\varphi\|_{C^k(G)}$

polož $$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{k}\, \|\varphi_k\|_{C^k(G)}} \cdot \varphi_k(x)$$

Ověříme: $\psi_k \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega)$
$\operatorname{supp} \psi_k = \operatorname{supp} \varphi_k \subset \overline{G}$ ... kompakt $\subset \Omega$

$$D^\alpha \psi_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{D^\alpha \varphi_k(x)}{\|\varphi_k\|_{C^k(G)}} \quad \leq 1 \ \forall x \in G \ (\text{též } \Omega) \ \text{pro } k \geq |\alpha|$$

(α pevné)

tj. $D^\alpha \psi_k \rightrightarrows 0$ v G
avšak: $$|\langle T, \psi_k \rangle| = \left|\left\langle T, \frac{\varphi_k}{\sqrt{k}\|\varphi_k\|_{C^k}} \right\rangle\right| = \sqrt{k} \underbrace{\left|\left\langle T, \frac{\varphi_k}{k\|\varphi_k\|_{C^k(G)}} \right\rangle\right|}_{>1} \to \infty$$

spor se spojitostí T

Def.: Pokud číslo m lze volit nezávisle na $G \subset\subset \Omega$ říkáme, že T je konečného řádu.
Nejmenší číslo $m \geq 0$ (celé) takové, že $(*)$ platí pro $\forall G \subset\subset \Omega$, se nazývá řádem distribuce. (Konstanta K stále může záviset na G)

Příkl. ① $f(x) \in L^1_{loc}(\Omega) \Rightarrow T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je řádu 0

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| \leq K \|\varphi\|_{C^0(G)} \; ; \quad G = \operatorname{supp} \varphi, \quad K = \int_G |f(x)|\,dx$$

② Dirac δ_a je řádu 0

Platí obrácené: $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je řádu $0 \Rightarrow$
$\Rightarrow T = T_\mu$; kde μ je míra v Ω

③ $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$; $\langle S, \varphi \rangle = \varphi'(0)$ je řádu 1

$$-\frac{d}{dx}\delta_0 = S$$

④ $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ... $\cancel{\sum_{n \in \mathbb{Z}}}$ $\langle T, \varphi \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(n)$ ... nemá konečný řád

Pozn.: $\mathcal{D}'(\Omega)$ je vektorový prostor
$T \in \mathcal{D}'(\Omega)$; $a \in \mathbb{R}$: $aT \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definujeme

$$\langle aT, \varphi \rangle := a \langle T, \varphi \rangle \; \left(= \langle T, a\varphi \rangle \right)$$

$T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ... $T_1 + T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definujeme

$$\langle T_1 + T_2, \varphi \rangle := \langle T_1, \varphi \rangle + \langle T_2, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

D.cv. aT, $T_1 + T_2$ jsou lineární a spojité

Def.: Nechť $T_n, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Řekneme, že T_n konvergují k T ve smyslu distribucí, jestliže $\langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$ pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pevné. Značíme $T_n \to T$ v $\mathcal{D}'(\Omega)$

Pozn. „bodová konvergence" // slabý pojem

Příkl.: ① $\sin nx \to 0$ v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$
přesněji řečeno $T_{\sin nx} \to 0$

? $\langle T_{\sin nx}, \varphi \rangle \to 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ pevné

$$\langle T_{\sin nx}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \sin nx \cdot \varphi(x)\,dx = \int_{-K}^{K} \sin nx\, \varphi(x)\,dx \to 0 \; ; n \to \infty$$

$\operatorname{supp} \varphi \subset [-K, K]$ Riemann-Lebesgueovo lemma

② $\psi(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, nechť $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\,dx = 1$, nechť $\psi(x) = 0$ pro $|x| > K$

$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon^n}\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \to \delta_0$ v $\mathcal{D}'(\Omega)$; $\varepsilon \to 0+$

cíl: $\left\langle T_{\frac{1}{\varepsilon^n}\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}, \varphi \right\rangle \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ pevné

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n}\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi(x)\,dx - \varphi(0) = \left| \begin{array}{l} x = \varepsilon y \\ dx = \varepsilon^n dy \end{array} \right.$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\varphi(\varepsilon y)\,dy - \varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\left[\varphi(\varepsilon y) - \varphi(0)\right] dy \to 0$$

$\to 0$: Lebesgue : y pevné : $\varphi(\varepsilon y) \to \varphi(0)$

majoranta nezávislá na ε : $|\varphi(x)| \leq C$ ↳ spojité

$|\psi(y)||\varphi(\varepsilon y) - \varphi(0)| \leq |\psi(y)| \cdot 2C \in L^1(\mathbb{R}^n)$

srovnej: věta o aproximaci Diraca

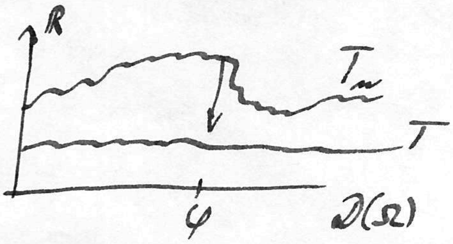
Def: Nechť $T_k, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Řekneme $\sum_{k=1}^{\infty} T_k = T$ ve smyslu distribucí, jestliže $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle T_k, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$; $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Řekneme, že zobrazení $\lambda \mapsto T_\lambda$ je spojité,
$\Lambda \to \mathcal{D}'(\Omega)$ // $\mathcal{D}'(\Omega)$ ani $\mathcal{D}(\Omega)$ nejsou metrický prostor
jestliže pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pevné je $\lambda \mapsto \langle T_\lambda, \varphi\rangle$ spojité

Věta 27.2. [Úplnost $\mathcal{D}'(\Omega)$] Nechť $T_n \in \mathcal{D}'(\Omega)$, nechť pro $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ existuje konečná $\lim_{n\to\infty}\langle T_n, \varphi\rangle$

Potom: označíme-li tuto limitu $\langle T, \varphi\rangle$, je $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$

DK.: (i) linearita : ✓
(ii) spojitost



Lemma 27.1. $T_\ell \in \mathcal{D}'(\Omega)$, nechť $\langle T_\ell, \varphi \rangle$ je
omezená posloupnost pro $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pevné
Nechť $\varphi_\ell \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega)$
Potom $\langle T_\ell, \varphi_\ell \rangle \to 0$

DK. (náznak) sporem: $\langle T_\ell, \varphi_\ell \rangle \not\to 0$

$$\exists c > 0 : |\langle T_\ell, \varphi_\ell \rangle| \geq c^{\nu(\alpha)} \text{ pro nekonečně } \ell$$

BÚNO: platí pro $\forall \ell$

urychlení konvergence $\varphi_\ell \to 0$:

víme: $\operatorname{supp} \varphi_\ell \subset K \ \forall \ell$; $K \subset\subset \Omega$ kompaktní

$D^\alpha \varphi_\ell \rightrightarrows 0$ v K $\forall \alpha$ pevné

lze vybrat podposloupnost (značenou stejně)

$$|D^\alpha \varphi_\ell(x)| \leq \frac{1}{4^\ell} \quad \forall x \in K$$
$\forall \alpha$ multiindex, $|\alpha| \leq \ell$

$\psi_\ell := 2^\ell \varphi_\ell$: (β) $|\langle T_\ell, \psi_\ell \rangle| \geq 2^\ell \cdot c$

leč: $|D^\alpha \psi_\ell(x)| \leq \frac{1}{2^\ell}$ $\forall \ell$, $\forall |\alpha| \leq \ell$

odsud vyvodím: $\psi_\ell \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega)$

dokonce $\sum_\ell \psi_\ell$ konv. v $\mathcal{D}(\Omega)$

zvolíme $\{\ell_\nu\} \subset \{\ell\}$ podposloupnost:

$\langle T_{\ell_\nu}, \psi \rangle$ ... neomezené

kde $\psi := \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_{\ell_\nu} \in \mathcal{D}(\Omega)$

ℓ_1 ... volme tak, že $|\langle T_{\ell_1}, \psi_{\ell_1} \rangle| > 2 \Leftarrow (\beta)$

$\ell_1, \dots, \ell_{\nu-1}$ známa: volme ℓ_ν tak velké, aby

$|\langle T_{\ell_j}, \psi_{\ell_\nu} \rangle| \leq \frac{1}{2^{\nu-j}}$; $j = 1, \dots, \nu-1$

$|\langle T_{\ell_\nu}, \psi_{\ell_\nu} \rangle| \geq \sum_{j=1}^{\nu-1} c(\psi_{\ell_j}) + \nu + 1$ kde $c(\psi_{\ell_j}) := \sup_n |\langle T_n, \psi_{\ell_j} \rangle|$

Tvrdíme $|\langle T_{k\nu}, \psi\rangle| > \nu \ \forall \nu$

$$\langle T_{k\nu}, \psi\rangle = \langle T_{k\nu}, \sum_j \psi_{k_j}\rangle$$

$$= \langle T_{k\nu}, \psi_{k\nu}\rangle + \langle T_{k\nu}, \sum_{j<\nu} \psi_{k_j}\rangle + \langle T_{k\nu}, \sum_{j>\nu} \psi_{k_j}\rangle$$

$$= (1) + (2) + (3)$$

$$|(1)| > \nu + 1 + \sum_{j=1}^{\nu-1} C(\psi_{k_j})$$

$$|(2)| \leq \sum_{j=1}^{\nu-1} |\langle T_{k\nu}, \psi_{k_j}\rangle| \leq \sum_{j=1}^{\nu-1} C(\psi_{k_j})$$

$$|(3)| \leq \sum_{j>\nu} |\langle T_{k\nu}, \psi_{k_j}\rangle| \leq \sum_{j>\nu} \frac{1}{2^{\nu+j}} = 1$$

$$|(1)+(2)+(3)| \geq (1) - |(2)| - |(3)| \geq \nu$$

Důkaz V.27.2. $\langle T, \varphi\rangle := \lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$\hookrightarrow \exists$ konečná, předpoklad

linearita:

$$\langle T, \varphi_1 + \varphi_2\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi_1 + \varphi_2\rangle$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\langle T_n, \varphi_1\rangle + \langle T_n, \varphi_2\rangle\right)$$

$$= \underbrace{\lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi_1\rangle}_{\langle T, \varphi_1\rangle} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi_2\rangle}_{\langle T, \varphi_2\rangle}$$

$\langle T, a\varphi\rangle = a\langle T, \varphi\rangle$ analogicky

(ii) T spojité: ?? $\exists \varphi_k \in \mathcal{D}(\Omega)$; $\varphi_k \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega)$

ale $|\langle T, \varphi_k\rangle| \not\to 0$

$\exists a > 0: |\langle T, \varphi_k\rangle| \geq 2a \ \forall k$

ale: $\langle T, \varphi_k\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi_k\rangle$; k pevné

$\forall k \ \exists n_k$; $|\langle \underbrace{T_{n_k}}_{S_k}, \varphi_k\rangle| > a$

$\langle S_k, \varphi \rangle$ omezená (má limitu) $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pevné

L. 27.1. $\langle S_k, \varphi_k \rangle \to 0$

spor

Příkl.: $T: \varphi \mapsto \sum_{n \in N} \varphi(n)$

$T = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$ ... řada konverguje v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$\exists \lim_{n\to\infty} \left\langle \sum_{k=1}^{n} \delta_n, \varphi \right\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ pevné

vlastní

věta 27.2. $\Rightarrow T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Distribuce $\quad T: \varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle = \cancel{\int_\Omega T(x)\varphi(x)\,dx}$

$\mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$

lineární spojité

$T = T(x)$

$\llcorner$ formální název proměnné v Ω

$\langle T, \varphi \rangle = \langle T(x), \varphi(x) \rangle = \langle T(x), \varphi(x) \rangle_x$

cíl: záměna proměnné v distribuci

$T(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ... ? $T(Ay + b) \in \mathcal{D}'(\tilde{\Omega})$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární matice

$b \in \mathbb{R}^n$

heuristická úvaha: $f(x) \in L^1_{loc}(\Omega) \dots f(Ay+b) \in L^1_{loc}(\tilde{\Omega})$

$\tilde{\Omega} = \{Ay + b \,;\, y \in \Omega\}$

chci $\quad T_{f(\cdot)}(Ay+b) = T_{f(A\cdot+b)}(y)$

$$\langle T_{f(A\cdot+b)}(y), \varphi(y) \rangle_y = \int_{\tilde{\Omega}} f(Ay+b)\varphi(y)\,dy \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} Ay + b = x \in \Omega \\ |\det A|\,dy = dx \\ y = A^{-1}(x-b) \end{array}$$

$$= \int_\Omega \frac{f(x)\varphi(A^{-1}(x-b))}{|\det A|}\,dx = \left\langle T_{f(\cdot)}(x), \frac{1}{|\det A|}\varphi(A^{-1}(x-b)) \right\rangle_x ; \ \varphi \in \mathcal{D}(\tilde{\Omega})$$

Definice: Nechť $T(x) \in \mathcal{D}'(\tilde{\Omega})$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je regulární
$b \in \mathbb{R}^n$. Distribuci $T(Ay+b) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definujeme předpisem

$$\langle T(Ay+b), \varphi(y)\rangle_y := \left\langle T(x), \frac{\varphi(A^{-1}(x-b))}{|\det A|}\right\rangle_x$$

pro $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, kde $\Omega = \{Ay+b;\ y \in \tilde{\Omega}\}$

Pozn. ověření, že $T(Ay+b) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ... za chvíli

Příkl. ① $\delta_0(y+b) =$

$A = I$ identita ... $\langle \delta_0(y+b), \varphi(y)\rangle$
$= \left\langle \delta_0(x), \frac{\varphi(x-b)}{1}\right\rangle_x = \varphi(x-b)\Big|_{x=0}$

$= \varphi(-b) = \langle \delta_{-b}, \varphi\rangle$
$f(x) \to f(x+b)$ posun grafu vlevo

② $\delta_0(ay) = \frac{1}{a^n}\delta_0(y)$ $\quad a>0;\ A = aI;\ b=0$

$$\langle \delta_0(ay), \varphi(y)\rangle_y = \left\langle \delta_0(x), \frac{\varphi(a^{-1}x)}{a^n}\right\rangle_x = \frac{1}{a^n}\varphi(0)$$

$$= \left\langle \frac{1}{a^n}\delta_0(x), \varphi(x)\right\rangle_x$$

③ $\frac{1}{\varepsilon^n}\delta_0\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) = \delta_0(y)$ $\quad \forall \varepsilon > 0$

Lemma 27.2. [O spojitosti duálního zobrazení]
Nechť $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ jsou otevřené, nechť $\Phi: \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\tilde{\Omega})$
je spojité, lineární zobrazení. Definujme duální
zobrazení $\Phi': \mathcal{D}'(\tilde{\Omega}) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ předpisem

$$\langle \Phi'(T), \varphi\rangle := \langle T, \Phi(\varphi)\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Potom Φ' je spojité lineární zobrazení
speciálně $\Phi'(T) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ pro $\forall T \in \mathcal{D}'(\tilde{\Omega})$

Dk. 1. $\Phi'(T) \in \mathcal{D}'(\Omega)$; $T \in \mathcal{D}'(\tilde{\Omega})$ pevné

linearita: $\langle \Phi'(T), \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = \langle T, \Phi(\varphi_1 + \varphi_2) \rangle$

$$= \langle T, \Phi(\varphi_1) + \Phi(\varphi_2) \rangle$$
$$= \langle T, \Phi(\varphi_1) \rangle + \langle T, \Phi(\varphi_2) \rangle$$
$$= \langle \Phi'(T), \varphi_1 \rangle + \langle \Phi'(T), \varphi_2 \rangle$$

podobně: $\langle \Phi'(T), a\varphi \rangle = a \langle \Phi'(T), \varphi \rangle$

spojitost: $\varphi_n \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega) \overset{?}{\Rightarrow} \langle \Phi'(T), \varphi_n \rangle \to 0$

$$\langle \Phi'(T), \varphi_n \rangle = \langle T, \underbrace{\Phi(\varphi_n)}_{\to 0 \text{ v } \mathcal{D}(\tilde{\Omega})} \rangle \to 0$$

2. $\Phi'(T_1 + T_2) = \Phi'(T_1) + \Phi'(T_2)$

$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ libovolné: $\langle \Phi'(T_1 + T_2), \varphi \rangle = \langle T_1 + T_2, \Phi(\varphi) \rangle$

$$= \langle T_1, \Phi(\varphi) \rangle + \langle T_2, \Phi(\varphi) \rangle = \langle \Phi'(T_1), \varphi \rangle + \langle \Phi'(T_2), \varphi \rangle$$

3. $T \to \Phi'(T)$ spojité, tj.:

$T_n \to 0$ v $\mathcal{D}'(\tilde{\Omega}) \overset{?}{\Rightarrow} \Phi'(T_n) \to 0$ v $\mathcal{D}'(\Omega)$

$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pevné: $\langle \Phi'(T_n), \varphi \rangle = \langle T_n, \underbrace{\Phi(\varphi)}_{\in \mathcal{D}(\tilde{\Omega})} \rangle \to 0$

Důsl. $T(Ay + b) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ pro $\forall\, T \in \mathcal{D}'(\tilde{\Omega})$ ... viz předchozí definice

dokonce $T(x) \mapsto T(Ay + b)$ je spojité, lineární

$\mathcal{D}'(\tilde{\Omega}) \to \mathcal{D}'(\Omega)$

dk. aplikuj L.27.2. na $\Phi: \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}^F(\tilde{\Omega})$

$$\varphi(y) \mapsto \frac{\varphi(A^{-1}(x-b))}{|\det A|}$$

Φ je lineární a spojité

Def.: $T(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ se nazve

1. sudá, je-li $T(-x) = T(x)$
2. lichá, je-li $T(-x) = -T(x)$
3. radiální, je-li $T(Qx) = T(x)$ ~~kde~~ $\forall Q$ otočení kolem 0

Opakování : Gaussova věta

$M \subset \mathbb{R}^n$ rozumná

$F(x) \in C^1(\bar{M})$ $\qquad \displaystyle\int_M \frac{\partial F}{\partial x_i}\,dx = \int_{\partial M} F \nu_i \, dS$

Důsl. „per-partes" v $\mathbb{R}^n$: $f, g \in C^1(\bar{M})$

$$\int_M f \frac{\partial g}{\partial x_i}\,dx = \int_{\partial M} f g \nu_i \, dS - \int_M \frac{\partial f}{\partial x_i} g \, dx$$

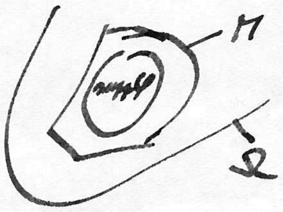
$$\left(\text{volme } F = fg \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x_i} = f \frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i} g \right)$$

Lemma 27.3. Nechť $f(x) \in C^m(\Omega)$, $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$

Potom $\displaystyle\int_\Omega (D^\alpha f)\varphi\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f\, D^\alpha \varphi\,dx$

pro $\forall \alpha$ multiindex, $|\alpha| \le m$

dk



supp $\varphi \subset\subset M$

⋮

omezená
rozumná

$$\int_\Omega (D^\alpha f)\varphi\,dx = \int_M (D^\alpha f)\varphi\,dx = \int_M \frac{\partial}{\partial x_1}(D^{\hat\alpha} f)\varphi\,dx \quad \Bigg| \begin{array}{l}\text{per-partes}\\ \varphi = 0 \\ \text{na } \partial M\end{array}$$

$\alpha = \hat\alpha + (1,0,0\dots)$

$$= -\int_M D^{\hat\alpha} f \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\,dx \underset{|\alpha| \text{ krát per partes}}{= \cdots} = (-1)^{|\alpha|}\int_M f\, D^\alpha \varphi\,dx$$

$D^\beta \varphi = 0$ na ∂M pro $\forall \beta$

L 27.3: : $\langle T_{D^\alpha f}, \varphi \rangle = \langle T, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi \rangle$

Def.: Nechť $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, α libovolný multiindex
Potom definuji $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ předpisem
$\varphi \mapsto \langle T, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi \rangle$

Věta 27.3. Pro $\forall \alpha$ multiindex je $T \mapsto D^\alpha T$ spojité lineární zobrazení z $\mathcal{D}'(\Omega)$ do $\mathcal{D}'(\Omega)$: speciálně $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$

dk.: až později

Příkl. ① $\frac{d}{dx} T_h = \delta_0$

$$h(x) = \begin{cases} 1 \,; & x > 0 \\ 0 \,; & x < 0 \end{cases} \quad \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$$

$$\left\langle \frac{d}{dx} T_h, \varphi \right\rangle = \left\langle T_h, -\frac{d}{dx}\varphi \right\rangle =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} h(x)(-\varphi'(x))\, dx = -\int_0^\infty \varphi'(x)\, dx = -\left[\varphi(x)\right]_0^\infty = \varphi(0) =$$

$$= \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

dk. (V.27,3) $\Phi : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$
$\varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi$ spojité, lineární
$\Rightarrow$ jsem hotov: $T \to D^\alpha T$ je Φ'

lineární: zjevné $\qquad \forall \alpha$ zjevné

spojitost: $\varphi_n \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega) \overset{?}{\Rightarrow} D^\alpha \varphi_n \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega)$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \operatorname{supp} \varphi_n \subset K \ \forall n, \ K \text{ kompakt} \\ 2)\ D^\beta \varphi_n \rightrightarrows 0 \text{ v } \Omega \end{array}\right\} \begin{array}{l} \operatorname{supp} D^\alpha \varphi_n \subset K \ \forall n \\ D^\beta(D^\alpha \varphi_n) = D^{\tilde\beta} \varphi_n \rightrightarrows 0 \end{array}$$

Pozn. $\frac{d}{dx}$, D^α ... derivace $\begin{cases} \text{bodová} \\ \text{ve smyslu distribucí} \end{cases}$

Lemma 27.3: $\underbrace{D^\alpha}_{\text{distr.}} T_f = T_{\underbrace{D^\alpha f}_{\text{bodová}}}$; $f \in C^m(\Omega)$; $|\alpha| \le m$

Příkl. ① $h(x) = \begin{cases} 1 \,; & x > 0 \\ 0 \,; & x \le 0 \end{cases}$ Heavisideova fce
$\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

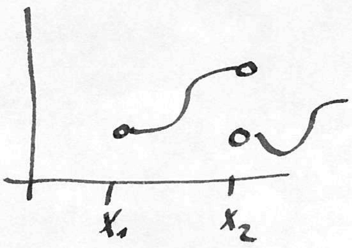
$$\frac{d}{dx} T_h = \delta_0 \text{ v } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

Opak. $f(x)$ je po částech C^1 v (a,b)

$\exists\ x_1 < \dots < x_n \in (a,b)$

~~$f(x) \in C^1$~~ f, f' jsou spojité mimo x_j

a mají vlastní jednostranné limity v x_j



viz „Fourierovy řady"

Lemma 27.4. Nechť $f(x)$ je po částech C^1 v (a,b)

Potom

$$\frac{d}{dx} T_f = T_{f'} + \sum_j \left\{ f(x_j+) - f(x_j-) \right\} \delta_{x_j}$$

ve smyslu $\mathcal{D}'(a,b)$, kde f' je bodová derivace f (definovaná jen s.v. v (a,b))

Dk. $\varphi \in \mathcal{D}(a,b)$: $\left\langle \frac{d}{dx} T_f, \varphi \right\rangle = \left\langle T_f, -\varphi' \right\rangle = \int_a^b f(x)\left(-\varphi'(x)\right) dx =$

BÚNO $a = x_0 < x_1 \dots < x_n = b$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\left[-\varphi'(x)\right] dx = \sum_j \left[-f(x)\varphi(x) \right]_{x_{j-1}}^{x_j} + \sum_j \int_{x_{j-1}}^{x_j} f'(x)\varphi(x)\, dx =$$

... per-partes na (x_{j-1}, x_j) : $f, \varphi \in C^1$

$$= \underbrace{\sum_j \left(-f(x_j-)\varphi(x_j) + f(x_{j-1}+)\varphi(x_{j-1}) \right)}_{\sum_{j=1}^{n-1} \left(f(x_j+) - f(x_j-) \right) \underbrace{\varphi(x_j)}_{\langle \delta_{x_j}, \varphi \rangle}} + \underbrace{\int_a^b f'(x)\varphi(x)\, dx}_{\langle T_{f'}, \varphi \rangle}$$

Příkl. $\frac{d}{dx} \ln|x| = ?$ v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

bodová derivace : $(\ln|x|)' = \underset{\notin L^1_{loc}(\mathbb{R})}{\frac{1}{x}}$ s.v. v $\mathbb{R}$

$\frac{d}{dx} T_{\ln|x|}$

$$\left\langle \frac{d}{dx} T_{\ln|x|}, \varphi \right\rangle = \left\langle T_{\ln|x|}, -\varphi' \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \underset{\in L^1_{loc}(\mathbb{R})}{\ln|x|} \left(-\varphi'(x)\right) dx$$

Důk.: $\displaystyle = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{I_\varepsilon} \ln|x| \left(-\varphi'(x)\right) dx \quad ; \quad I_\varepsilon = \mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)$

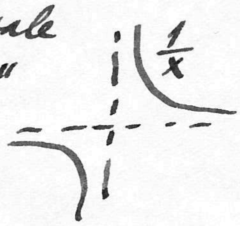
$$\int_{I_\varepsilon} \ln|x| \left(-\varphi'(x)\right) dx = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} = \Big| \text{ per-partes}$$

$$= \underbrace{\Big[-\ln|x|\,\varphi(x)\Big]_{-\infty}^{-\varepsilon} + \Big[-\ln|x|\,\varphi(x)\Big]_{\varepsilon}^{\infty}}_{} + \int_{I_\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$

$$\left.\begin{aligned} & -\ln|-\varepsilon|\,\varphi(-\varepsilon) + \ln|\varepsilon|\,\varphi(\varepsilon) \\ & = \ln \varepsilon \underbrace{\left(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)\right)}_{= \mathcal{O}(\varepsilon)} \end{aligned}\right\} \to 0 \,;\; \varepsilon \to 0+$$

$$\left\langle \frac{d}{dx} T_{\ln|x|}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{I_\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$

v.p. : la valeur principale
„hlavní hodnota"



$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \text{v.p.}\ \frac{1}{x}$$

$$\text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\, dx$$

Pozn. co nefunguje v $\mathcal{D}'(\Omega)$

nelze definovat $T(x)$ ... hodnota distribuce v bodě

— " — $T \cdot S$ pro $T, S \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Def.: Nechť $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, nechť $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ je otevřená.
Řekneme, že T je nulová v $\tilde{\Omega}$, jestliže $\langle T, \varphi \rangle = 0$
pro $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\operatorname{supp} \varphi \subset \tilde{\Omega}$

Dále definuji

$$\mathcal{O}_T = \bigcup \left\{ \tilde{\Omega} \,;\, T \text{ je nulová v } \tilde{\Omega} \right\}$$

„nulová množina" T

$$\operatorname{supp} T := \Omega \setminus \mathcal{O}_T$$

Příkl.: $\operatorname{supp} \delta_a = \{a\}$; platí obráceně : $\operatorname{supp} T = \{a\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow T = \sum_{j=0}^{N} c_n D^{\alpha_n} \delta_a$$