Věta 12.1 Řešení rce $y' + a(x)y = b(x)$ má tvar $y(x) = \exp(-A(x)) \cdot [B(x) + C]$, kde $A(x) = \int a(x)\,dx$, $B(x) = \int b(x) \exp A(x)\,dx$.

Dk. víme: $A'(x) = a(x)$, $B'(x) = b(x) \exp A(x)$

a tedy: $(\exp A(x))' = \exp A(x) \cdot A'(x)$
(V. 4.3) $\qquad = \exp A(x) \cdot a(x)$

... ekvivalentní úpravy:

$$y'(x) + a(x) y(x) = b(x) \qquad \Big/ \cdot \exp A(x)$$

$$\underbrace{y'(x) \exp A(x) + y(x) \cdot \underbrace{a(x) \exp A(x)}_{(\exp A(x))'}}_{(V.4.2)} = b(x) \exp A(x)$$

$$\left(y(x) \exp A(x) \right)' = \left(B(x) \right)'$$

Lemma 9.4:

$$y(x) \exp A(x) = B(x) + C \qquad \Big/ \frac{1}{\exp A(x)}$$

$$y(x) = \exp(-A(x)) [B(x) + C]$$

Věta 12.2 Řešení rce $y' = g(y)f(t)$ mé

tvar $y(t) = G_{-1}(F(t)+c)$, $t \in I_c$,

kde $F(t) = \int f(t)$, $G(y) = \int \frac{dy}{g(y)}$.

Dk. máme: $F'(t) = f(t)$, $G'(y) = \frac{1}{g(y)}$

a tedy: $y'(t) = \left(G_{-1}(F(t)+c)\right)'$

$$= \underbrace{(G_{-1})'(F(t)+c)}_{\frac{1}{G'(\underbrace{G_{-1}(F(t)+c)}_{y(t)})}} \cdot \underbrace{(F(t)+c)'}_{f(t)}$$

$$= \frac{1}{G'(y(t))} \cdot f(t) = g(y(t)) \cdot f(t)$$

Lemma 12.1 [O napojování řešení.]

Dk. stačí ověřit, že $\exists\, y'(x_0) \in \mathbb{R}$

a platí $y'(x_0) = f(x_0, y(x_0))$

víme: $\lim\limits_{x \to x_0 \pm} y(x) = y_0 = y(x_0)$,

a tedy (Věty 2.2, 2.5): $y(x)$ je spojité v bodě x_0.

dle Věty 6.6: $y'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} y'(x)$

(má-li P.S. smysl)

leč: rovnice platí na jistém $P(x_0, \delta)$,

a tedy: $\lim\limits_{x \to x_0} y'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y(x))$

$= f(x_0, y(x_0))$

... neboť: $x \to x_0$, $y(x) \to y(x_0) = y_0$

$f(x,y)$ spojité v bodě (x_0, y_0)

Věta 12.6 [množina řešení lin. ODR]

Označ $\mathcal{H} = \{ y \in C^n(I);\ \mathcal{L}[y] = 0 \}$

$\mathcal{N}_f = \{ y \in C^n(I);\ \mathcal{L}[y] = f \}$

$\mathcal{U}(x) = \left(y_j^{(i-1)}(x) \right)_{i,j=1}^{n}$, kde

$\{ y_1, \dots y_n \}$ je báze $\mathcal{H}$.

Pak 1. $\mathcal{H} \subset\subset C^{(n)}(I)$, $\dim \mathcal{H} = n$

2. $\mathcal{N}_f = \{ y_p + y;\ y \in \mathcal{H} \}$, kde

y_p je pevné, libovolné

3. $\mathcal{U}(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je regulární matice

pro $\forall x \in I$

Dk. 1. $\mathcal{H} = \ker \mathcal{L} \Rightarrow$ je to lineární podprostor

$\dim \mathcal{H} = ?$

pomocné zobrazení $\mathcal{T} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^n$

($x_0 \in I$ pevné)

$$y \longmapsto \begin{pmatrix} y(x_0) \\ y'(x_0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

Věta 12.5 $\Rightarrow$ $\mathcal{I}$ je vzájemně jednoznačné,

navíc je lineární

... tj. $\mathcal{I}$ je izomorfismus, speciálně:

$$\dim \mathcal{H} = \dim \mathbb{R}^n = n$$

2. důsledek Věty z LA, fakticky

jde o dvě věci:

(i) $y_p \in \mathcal{N}_f,\ y \in \mathcal{H} \Rightarrow y_p + y \in \mathcal{N}_f$

(ii) $y_p, \tilde{y}_p \in \mathcal{N}_f \Rightarrow y_p - \tilde{y}_p \in \mathcal{H}$

... plyne snadno z linearity $\mathcal{L}$

3. plyne z bodu 1., neboť:

$$U(x_0) = \left(\mathcal{I}y_1, \mathcal{I}y_2, \dots, \mathcal{I}y_n \right),$$

tj. sloupce $U(x_0)$ jsou vektory $\mathcal{I}y_j \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ nutně LN (izomorfní obraz báze)

$\Rightarrow$ matice je regulární...

Věta 12.7. [Variace konstant.]

Nechť $\{y_1, \dots, y_n\}$ je F.S., nechť funkce $c_1, \dots, c_n$ splňují soustavu, pro $\forall x \in I$:

$$\left.\begin{aligned} c_1' y_1 + c_2' y_2 + \dots + c_n' y_n &= 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + \dots + c_n' y_n' &= 0 \\ &\vdots \\ c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} \dots + c_n' y_n^{(n-1)} &= \frac{f}{a_0} \end{aligned}\right\} (VK)$$

Potom $y = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \in \mathcal{N}_f$.

Dk.: 1. vypočteme $y', y'', \dots y^{(n)}$:

$$y' = \sum_{j=1}^{n} (c_j y_j)' = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_j' y_j}_{0 \text{ dle } (VK)_1} + \sum_{j=1}^{n} c_j y_j'$$

$$y'' = \sum_{j=1}^{n} (c_j y_j')' = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_j' y_j'}_{0 \text{ dle } (VK)_2} + \sum_{j=1}^{n} c_j y_j''$$

$$\dots \quad y^{(n-1)} = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j^{(n-1)}, \quad \text{a konečně:}$$

$$y^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} \left(c_j y_j^{(n-1)}\right)' = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_j' y_j^{(n-1)}}_{\frac{f}{a_0} \text{ dle } (VK)_n} + \sum_{j=1}^{n} c_j y_j^{(n)}$$

<u>CELKEM</u>: $y^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j^{(i)}, \ i = 0, \dots n-1$

$$y^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j^{(n)} + \frac{f}{a_0}$$

<u>2.</u> dosadíme do rovnice:

$$\mathcal{L}[y] = \sum_{r=0}^{n} a_r y^{(n-r)} = \underbrace{\sum_{r=0}^{n} a_r \sum_{j=1}^{n} c_j y_j^{(n-r)}}$$

$$\underbrace{+ a_0 \cdot \frac{f}{a_0}}_{= f}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{r=0}^{n} a_r y_j^{(n-r)}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j \mathcal{L}[y_j] = 0.$$