Věta 10.9. Nechť $a_k \in \mathbb{C}$. Potom:

$\sum a_k$ konverguje $\iff$ $\sum a_k$ splňuje (BC-ř):

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \forall p \geq 1: \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon.$$

Dk. 1. klíčové pozorování:

$\sum a_k$ splní (BC-ř) $\iff$ $\{s_n\}$ splní (BC):

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall m, n \geq n_0: |s_m - s_n| < \varepsilon$$

... BÚNO $m > n$, $m = n + p$

$$s_m - s_n = \sum_{k=1}^{n+p} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$$

2. $\{s_n\}$ konverguje (tj. $\sum a_k$ konv.)

$\Updownarrow$ ... Věta 7.5 (pro $\mathbb{R}$; obecněji viz Kap. 13)

$\{s_n\}$ splní (BC)

Věta 10.10. [O absolutní konvergenci.]

Nechť $a_k \in \mathbb{C}$, nechť $\sum |a_k|$ konverguje.

Pak řada $\sum a_k$ konverguje.

Dk.: víme: $\sum |a_k|$ konv, tedy (V. 10.9.)

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \; \forall \ell \geq 1 : \left| \sum_{k=n+1}^{n+\ell} |a_k| \right| < \varepsilon .$$

cíl: $\sum a_k$ konv., tj. (opět dle V. 10.9.)

$$(**) \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \; \forall \ell \geq 1 : \left| \sum_{k=n+1}^{n+\ell} a_k \right| < \varepsilon .$$

avšak $\displaystyle \left| \sum_{k=n+1}^{n+\ell} |a_k| \right| = \sum_{k=n+1}^{n+\ell} |a_k| \geq \left| \sum_{k=n+1}^{n+\ell} a_k \right|$

(dle Δ-nerovnosti v $\mathbb{C}$),

a tedy $(*) \Rightarrow (**)$.

<u>Lemma 10.3.</u> Nechť $a_k, b_k \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Polož $\tilde{s}_m = \sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k$, kde $m \geq n$. Potom:

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = \tilde{s}_m b_{m+1} + \sum_{k=n+1}^{m} \tilde{s}_k \left(b_k - b_{k+1} \right).$$

pro $\forall m > n$.

<u>Dk.:</u> $\tilde{s}_m = s_m - s_n$;

tj. $\tilde{s}_n = 0$

$\tilde{s}_k = \tilde{s}_{k-1} + a_k$, $k > n$

$$LS = \sum_{k=n+1}^{m} \left(\tilde{s}_k - \tilde{s}_{k-1} \right) b_k$$

$$= \sum_{k=n+1}^{m} \tilde{s}_k b_k - \underbrace{\sum_{k=n+1}^{m} \tilde{s}_{k-1} b_k}_{(*)}$$

$$(*) \quad \sum_{k=n}^{m-1} \tilde{s}_k b_{k+1} = \sum_{k=n+1}^{m} \tilde{s}_k b_{k+1} - \tilde{s}_m b_{m+1}$$

a tedy:

$$LS = \underbrace{\sum_{k=n+1}^{m} s_k b_k - \sum_{k=n+1}^{m} s_k b_{k+1}}_{\sum_{k=n+1}^{m} s_k (b_k - b_{k+1})} + s_m b_{m+1}$$

$= PS.$

Věta 10.12. [Dirichletovo krit.].
Nechť $\sum a_k$ má omezené částečné součty.
Nechť $b_k \to 0$, navíc $\{b_k\}$ je monotónní od jistého $k \geq n_0$. Pak $\sum a_k b_k$ konverguje.

Dk. ... Věta 10.9: stačí ověřit (BC-R):

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \; \forall l \geq 1: \left| \sum_{k=n+1}^{n+l} a_k b_k \right| < \varepsilon$$

$\varepsilon > 0$ dáno: $\exists K > 0$ t.ž. $|s_n| < K$

pro $\forall n \in \mathbb{N}$, kde

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$\exists n_0$ t.ž. $|b_k| < \frac{\varepsilon}{2K}$, $\forall k \geq n_0$

<u>BÚNO:</u> $\{b_k\}$ nerostoucí pro $k \geq 1$,

a tedy nutně: $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq 0$.

buď $n \geq n_0$, $k \geq 1$ libovolné

$$\tilde{s}_m = s_m - s_n = \sum_{k=n+1}^{m} a_k,$$

zřejmě $|\tilde{s}_k| \leq |s_k| + |s_n| < 2K$

L. 10.3. (Ábel.) $\Rightarrow$

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = \tilde{s}_m b_{m+1} + \sum_{k=n+1}^{m} \tilde{s}_k (b_k - b_{k+1})$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k\right| \leq |\tilde{s}_m| |b_{m+1}|$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{m} |s_k| |b_k - b_{k+1}|$$

platí: $|\tilde{s}_k| < 2K$, $|b_k| = b_k$

$$|b_k - b_{k+1}| = b_k - b_{k+1}$$

a tedy:

$$\le 2K \cdot b_{n+1} + 2K \cdot \sum_{k=n+1}^{m} (b_k - b_{k+1})$$

$$= 2K \left(b_{n+1} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{m} (b_k - b_{k+1})}_{\text{teleskopické sumy: } b_{n+1} - b_{m+1}} \right)$$

$$= 2K \cdot \underbrace{b_{n+1}}_{< \frac{\varepsilon}{2K} \text{ (neboť } n+1 > n_0\text{)}} < \varepsilon.$$

Důsl. Věty 10.11. (Leibniz)

$a_k = (-1)^k \ldots \sum (-1)^k$ má omezené

částečné součty.

Lemma 10.4. Nechť $x \neq 2m\pi$.

Pak $$\sum_{k=0}^{n} \sin kx = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \cdot \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \cos kx = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \cdot \cos \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Dk. $e^{iy} = \cos y + i \cdot \sin y \quad \forall y \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

kde $q = e^{ix} \neq 1 \ (\Leftrightarrow x \neq 2m\pi)$

$$e^{irx} = \cos rx + i \sin rx \,;$$

$$LS = \sum_{r=0}^{n} \cos rx + i \cdot \sum_{r=0}^{n} \sin rx$$

$$PS = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1}$$

$$= \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} \cdot \frac{e^{-i\left(\frac{n+1}{2}\right)x}}{e^{i\frac{x}{2}}} \cdot e^{i\frac{n}{2}x}$$

$$= \frac{e^{i\left(\frac{n+1}{2}\right)x} - e^{-i\left(\frac{n+1}{2}\right)x}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} \cdot e^{i\frac{n}{2}x}$$

$$\overset{*)}{=} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \left(\cos\frac{n}{2}x + i \sin\frac{n}{2}x\right)$$

*) díky rovnici: $\frac{1}{2i}\left(e^{iy} - e^{-iy}\right) = \sin y$

Věta 10.13. [Abelovo krit.]

Nechť $a_k \in \mathbb{C}$, nechť $\sum a_k$ konverguje.
Nechť $\{b_k\}$ je omezená, monotónní ($k \geq k_0$).
Pak $\sum a_k b_k$ konverguje.

Dk. Věta 7.2. $\Rightarrow b_k \to b \in \mathbb{R}$

píšeme: $a_k b_k = a_k (b_k - b) + b \cdot a_k$

$\sum b \cdot a_k$ konv. $\Leftarrow$ aritmetika řad,
(Věta 10.2., část 1)

$\sum a_k (b_k - b)$ konv. $\Leftarrow$ Dirichlet
(Věta 10.12.)

neboť: $\sum a_k$ ... omezenost $\{s_n\}$
(Věta 7.1.)
$(b_k - b) \to 0$, monotónní ($k \geq n_0$)

CELKEM: $\sum a_k b_k$ konv. (Věta 10.2, část 2)

Věta 10.14. [O přerovnání řady.]

Nechť $a_k \in \mathbb{C}$. Nechť buď (i) $a_k \geq 0$, nebo (ii) $\sum a_k$ konv. absolutně. Potom

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$ pro libovolné přerovnání.

Dk. 1. Nechť $a_k \geq 0$

označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad t = \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

víme: $\{s_n\}$, $\{t_n\}$ neklesající, a tedy:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sup\{s_n, n \in \mathbb{N}\}$$

$$t = \lim_{n\to\infty} t_n = \sup\{t_n, n \in \mathbb{N}\}$$

Věta 7.2

pro $n \in \mathbb{N}$ polož:

$$N(n) = \max\{\varphi(k), k = 1, \dots n\}$$

$$a_1 + \dots + a_n$$

$$b_1 + \dots + b_{N(n)}$$

zřejmě platí: $s_n \le t_{N(n)}$

a tedy:

$$\begin{aligned} s &= \sup\{s_n, n \in \mathbb{N}\} \\ &\le \sup\{t_{N(n)}, n \in \mathbb{N}\} \\ &\le \sup\{t_n, n \in \mathbb{N}\} \\ &= t. \end{aligned}$$

symetrické úvahy: $t \le s$.

<u>2.</u> nechť $a_k \in \mathbb{R}$, $\sum |a_k| < +\infty$

pišme $a_k = a_k^+ - a_k^-$, kde

$$0 \le a_k^+, a_k^- \le |a_k|$$

$$\Rightarrow \sum_k a_k^+ ,\ \sum a_k^- < +\infty$$

a užiji Věta 10.2 + krok 1:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} b_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} b_k^- = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

<u>3.</u> $a_k \in \mathbb{C}$, $\sum |a_k| < +\infty$

píšeme: $a_k = \operatorname{Re} a_k + i \operatorname{Im} a_k$,

kde $|\operatorname{Re} a_k|, |\operatorname{Im} a_k| \leq |a_k|$

$$\Rightarrow \sum_k |\operatorname{Re} a_k| ,\ \sum_k |\operatorname{Im} a_k| < +\infty$$

a tedy dle Věty 10.2. + kroku 2:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k + i \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} b_k + i \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$