Lemma 9.4. Nechť: I je interval, $\Phi(x)$ spojité v I, $\Phi'(x) = 0$ pro $\forall x \in I$ vnitřní. Pak $\Phi(x)$ je konstantní v I.

Dk. $x_1, x_2 \in I$ libovolné, BÚNO $x_1 < x_2$

Věta 6.5 (Lagrange) $\Rightarrow \exists \theta \in (x_1, x_2)$ t.ž.

$$\boxed{\frac{\Phi(x_2) - \Phi(x_1)}{x_2 - x_1} = \Phi'(\theta)}$$

nutně: $\theta \in I$ vnitřní, tedy PS $= 0$

tedy LS $= 0$, neboli

$\Phi(x_1) = \Phi(x_2)$.

Věta 9.7 [Per-partes pro N.i.]

Nechť $\exists u'(x), v'(x)$ vlastní $\forall x \in (a, b)$.

Pak $\int_a^b u'(x)v(x) = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$,

má-li PS smysl.

Dk. PS má smysl $\Rightarrow \exists H(x)$ z.f. $u(x)v'(x)$

polož: $F(t) = u(t)v(t) - H(t)$

platí: $F'(t) = \left(u(t)v(t)\right)' - H'(t)$

$$= u'(t)v(t) + u(t)v'(t) - u(t)v'(t)$$

(dle věty 4.2) $= u'(t)v(t)$

tj. $F(t)$ je z.f. k $u'(t)v(t)$.

$$\Rightarrow LS = \left[F(t)\right]_a^b = \left[u(t)v(t) - H(t)\right]_a^b$$

$$= \lim_{x\to b-}\left(u(t)v(t) - H(t)\right) - \lim_{x\to a+}\left(u(t)v(t) - H(t)\right)$$

$$= \lim_{x\to b-} u(t)v(t) - \lim_{x\to b-} F(t)$$

$$- \lim_{x\to a+} u(t)v(t) + \lim_{x\to a+} F(t)$$

$$= \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \underbrace{\left[F(t)\right]_a^b}_{(N)\int_a^b uv'}$$

... díky VoAL, nelze výsledek nemá smysl (předpoklad!!).

<u>Věta 9.8</u>. Nechť $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ je ryze monotónní, 1-1 fce, $\exists \varphi' \neq 0$ vlastní. Nechť $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Pak

$$(N)\int_a^b f(x)\,dx = (N)\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,|\varphi'(u)|\,du$$

$$= (N)\int_{\varphi_{-1}(a+)}^{\varphi_{-1}(b-)} f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du .$$

<u>Dk.</u>: <u>1</u>. nechť LS má smysl, tj.

$LS = F(b-) - F(a+)$, kde $F'(x) = f(x)$, $x \in (a, b)$

polož: $G(u) = F(\varphi(u))$, tj.

$$G'(u) = F'(\varphi(u))\,\varphi'(u)$$
$$= f(\varphi(u))\,\varphi'(u), \quad u \in (\alpha, \beta)$$

neboli $G(u)$ je z. f. PS až na znaménko:

$|\varphi'(u)| = \pm \varphi'(u)$, pokud φ roste / klesá

(i) φ roste: $\varphi' > 0$, tj: $|\varphi'| = \varphi'$

$$PS = [G(u)]_\alpha^\beta = G(\beta-) - G(\alpha+).$$

leč: $G(\beta-) = \lim_{u \to \beta-} F(\varphi(u)) = F(b-)$

díky VoLSF (Věta 2.6)

vnější fce: $F(x) \to F(b-)$, $x \to b-$

vnitřní: $\varphi(u) \to b$, $u \to \beta-$

leč $\varphi(u) < b$, $u \in P_-(\beta)$

tj: $\varphi(u) \in P_-(b)$.

analogicky: $G(\alpha+) = F(a+)$, tedy

$$PS = LS.$$

(ii) φ klesá: $\varphi' < 0$, tj: $|\varphi'| = -\varphi'$

$$PS = -[G(u)]_\alpha^\beta = G(\alpha+) - G(\beta-).$$

leč zde: $G(\alpha+) = F(b-)$

$G(\beta-) = F(a+)$

2. nechť PS má smysl:

$$PS = \int_\alpha^\beta g(u)\,du \quad \Big| \text{ substituce } u = \theta(t)$$

$$\theta = \varphi_{-1} : (a,b) \to (\alpha,\beta)$$

$$g(u) = f(\varphi(u))\,|\varphi'(u)|$$

$$= \int_a^b \underbrace{g(\theta(x))}_{= f(\varphi(\theta(x)))\cdot|\varphi'(\theta(x))|}\,|\theta'(x)|\,dx = \overbrace{\int_a^b f(x)\,dx}^{= LS}.$$

$$\theta'(x) = \frac{1}{\varphi(\theta(x))} \quad (\text{věta } 4.4)$$