Opakuj • $f(x) \to A,\ x \to x_0$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A\right)$

$\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(A, \varepsilon)$

• $f(x)$ spojitá v bodě x_0:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : x \in U(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)$

$\Downarrow$ (Věta 2.5)

$f(x) \to f(x_0),\ x \to x_0$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x \to x_0} x\right)\right)$

Věta 2.3 (VoAL) ...

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) + \left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right)$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x)\, g(x)) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)\left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right)$$

.... atd.

Věta 2.6 (VoLSF: limita superpozice)

Nechť $f(x) \to y_0$, $x \to x_0$, $g(y) \to A$, $y \to y_0$, kde $x_0, y_0, A \in \mathbb{R}^*$. Nechť navíc:

buď (a) $g(y)$ je spojité v y_0

nebo (b) $f(x) \neq y_0$ na jistém $P(x_0)$.

Pak $g(f(x)) \to A$, $x \to x_0$

Dk: $\varepsilon > 0$ dáno: (cíl: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$)

$\exists \eta > 0 : \; y \in P(y_0, \eta) \Rightarrow g(y) \in U(A, \varepsilon)$

$\exists \delta > 0 : \; x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(y_0, \eta)$

... polož $y = f(x)$, leč $U \not\subset P$!!

ad (a): $g(y) \to g(y_0) = A$

(*) lze psát $U(y_0, \eta)$ ...

ad (b): BÚNO $\delta > 0$ t.ž. $f(x) \neq y_0$, $\forall x \in P(x_0, \delta)$

(**) lze psát $f(x) \in P(y_0, \eta)$

Příkl. ① $\sqrt{x^3-3x+1} \to \sqrt{3}$, $x \to 2$

$f(x) = x^3-3x+1 \to 3$, $x \to 2$ (VoAL)

$g(y) = \sqrt{y}$ ... spojité v bodě $y_0 = 3$

② $\dfrac{\sin(x^2)}{x^2} \to 1$, $x \to 0$

$f(x) = x^2 \to 0$, $x \to 0$, avšak $f(x) \neq 0$ na $P(x_0, \delta)$

$g(y) = \dfrac{\sin y}{y} \to 1$, $y \to 0$

(základní limita)

Opakuj.

$f(x) \to +\infty$, $x \to x_0$ značí:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(+\infty, \varepsilon)$

tj. $f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$

$f(x) \to -\infty$, $x \to x_0$ značí:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(-\infty, \varepsilon)$

tj. $f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}$

Věta 2.7 [VoAL – obecná verze]

nechť $f(x) \to A$, $g(x) \to B$ pro $x \to x_0$, kde $A, B, x_0 \in \mathbb{R}^*$. Potom:

(1) $f(x) + g(x) \to A + B$

(2) $f(x) - g(x) \to A - B$

(3) $f(x) \cdot g(x) \to A \cdot B$

(4) $f(x)/g(x) \to A/B$, $x \to x_0$,

má-li výraz napravo smysl (v $\mathbb{R}^*$).

Dk. (jen některé případy)

1. $A, B \in \mathbb{R}$ ... viz Věta 2.3

2. $A = B = +\infty$? $f(x) + g(x) \to A + B = +\infty$

$\varepsilon > 0$ dáno:

$\exists \delta_1 > 0 : x \in P(x_0, \delta_1) \Rightarrow f(x) \in U(+\infty, 2\varepsilon)$

tj. $f(x) > \frac{1}{2\varepsilon}$

$\exists \delta_2 > 0 : x \in P(x_0, \delta_2) \Rightarrow g(x) \in U(+\infty, 2\varepsilon)$

polož $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ tj. $g(x) > \frac{1}{2\varepsilon}$

$x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) + g(x) > \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}$

nebolí $f(x)+g(x)\in U(+\infty,\varepsilon)$.

2. $A\in\mathbb{R}$, $B=+\infty$: cíl $f(x)+g(x)\to+\infty$ $(=A+B)$

Lemma 2.1, část (1):

$\exists\,\delta_1>0\ \exists\,C: |f(x)|\le C,\ \forall x\in P(x_0,\delta)$

speciálně $f(x)\ge -C$

$\exists\,\delta_2>0: x\in P(x_0,\delta)\Rightarrow g(x)\in U\left(+\infty,\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon C}\right)$

polož $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$:

$$x\in P(x_0,\delta)\Rightarrow f(x)+g(x)>-C+\frac{1+\varepsilon C}{\varepsilon}$$
$$=\frac{1}{\varepsilon}$$

tj. $f(x)+g(x)\in U(+\infty,\varepsilon)$.

proč $\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon C}$? chci $f(x)+g(x)>\frac{1}{\varepsilon}$

mám: $f(x)\ge -C$

tj. stačí $g(x)>\frac{1}{\varepsilon}+C=\frac{1}{\tilde{\varepsilon}}$

kde $\tilde{\varepsilon}=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon C}$

3. $A = B = -\infty$, tj. $f(x) \cdot g(x) \to +\infty$

$(-\infty) \cdot (-\infty)$

$\varepsilon > 0$ dáno:

$\exists \delta_1 > 0 : x \in P(x_0, \delta_1) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(-\infty, \sqrt{\varepsilon})$

tj. $f(x) < -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$

$\exists \delta_2 > 0 : x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow g(x) \in \mathcal{U}(-\infty, \sqrt{\varepsilon})$

polož $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow \quad -f(x) > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$

$-g(x) > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$

$\Rightarrow \quad f(x) g(x) > \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 = \frac{1}{\varepsilon}$

tj. $f(x) g(x) \in \mathcal{U}(+\infty, \varepsilon)$

4. $A \in (-\infty, 0)$, $B = +\infty$

tj. $f(x) g(x) \to A \cdot (+\infty) = -\infty$

Věta 2.1: $\exists \Delta > 0$ t.ž. $0 \notin \mathcal{U}(A, \Delta)$

speciálně: $A + \Delta < 0$

$\exists \delta_1 > 0 : x \in P(x_0, \delta_1) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(A, \Delta)$

$\exists\, \delta_2 > 0 : x \in P(x_0, \delta_2) \Rightarrow g(x) \in \mathcal{U}(+\infty, -\varepsilon(A+\Delta))$

polož $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

$$x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow \quad g(x) > \frac{1}{-\varepsilon(A+\Delta)}$$

$$f(x) < A+\Delta < 0$$

$$g(x)\, g(x) < -\frac{1}{\varepsilon},$$

$$\text{tj: } f(x) g(x) \in \mathcal{U}(-\infty, \varepsilon)$$

---

5. $f(x) \to A \in \mathbb{R}$, $g(x) \to -\infty$

$$? \quad \frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{A}{-\infty} = 0.$$

stačí ukázat: $\frac{1}{g(x)} \to 0$, neboť potom

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \to A \cdot 0 = 0$$

dle věty 2.3, část (3)

$\varepsilon > 0$ dáno: $\exists\, \delta > 0$ t.ž. $g(x) \in \mathcal{U}(-\infty, \varepsilon)$

tj. $g(x) < -\frac{1}{\varepsilon}$

pro $x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow |g(x)| = -g(x) > \frac{1}{\varepsilon}$

tj. $\left|\frac{1}{g(x)}\right| < \varepsilon$

neboli $\frac{1}{g(x)} \in \mathcal{U}(0, \varepsilon)$.

---

6. ostatní případy analogicky;

platí $f(x) \to A \iff -f(x) \to -A$

(pro $A \in \mathbb{R}^*$)

a tedy BÚNO: $A, B > 0$.

Příkl. (1) $x \to +\infty$: $\frac{1}{x^2+1} \to \frac{1}{(+\infty)^2+1} = \frac{1}{+\infty} = 0$

(2) $x \to -\infty$: $x^3 + x^2 \to (-\infty)^3 + (-\infty)^2$

$= -\infty + \infty$ (???)

léže:

$x^3 + x^2 = x^3\left(1 + \frac{1}{x}\right) \to (-\infty)^3 (1+0) = -\infty$

Pozn.: není definováno např. $\frac{+\infty}{+\infty}$, neboť pro $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to +\infty$ může $\frac{f(x)}{g(x)}$ dělat cokoliv: uvaž

$x \to +\infty$, $f(x) = cx$ $(c>0)$

$g(x) = x$ nebo $g(x) = x^2$

Věta 2.8 (Limita typu $\frac{1}{\pm 0} = \pm\infty$)

Nechť $f(x) \to 0$, $x \to x_0$.

(1) Je-li $f(x) > 0$ na jistém $P(x_0)$,

pak $1/f(x) \to +\infty$, $x \to x_0$.

(2) Je-li $f(x) < 0$ na jistém $P(x_0)$,

pak $1/f(x) \to -\infty$, $x \to x_0$.

Dk. pro (2): $\varepsilon > 0$ dáno $\Rightarrow$

$\exists \delta > 0$ t.ž. $|f(x)| < \varepsilon$, $x \in P(x_0, \delta)$

BÚNO: δ malé t.ž. $f(x) < 0$, —"—

$\Rightarrow -\varepsilon < f(x) < 0$, tj. $\frac{1}{f(x)} < -\frac{1}{\varepsilon}$

Příkl. ① $\frac{1}{x^2} \to +\infty$, pro $x \to 0$

$\dots$ $f(x) = x^2 \to 0$ (VoAL)

$f(x) > 0$, $x \in P(0,\delta) = (-\delta,0) \cup (0,\delta)$

$\delta > 0$ libovolné

② $\frac{1}{x^2+x} \to -\infty$, $x \to 0-$

$\dots$ $f(x) = x^2 + x \to 0$ (VoAL)

$f(x) = x(1+x) < 0$, $x \in P_-(0,1)$

③ $\frac{\sin\sqrt{x}}{x} \to +\infty$, $x \to 0+$

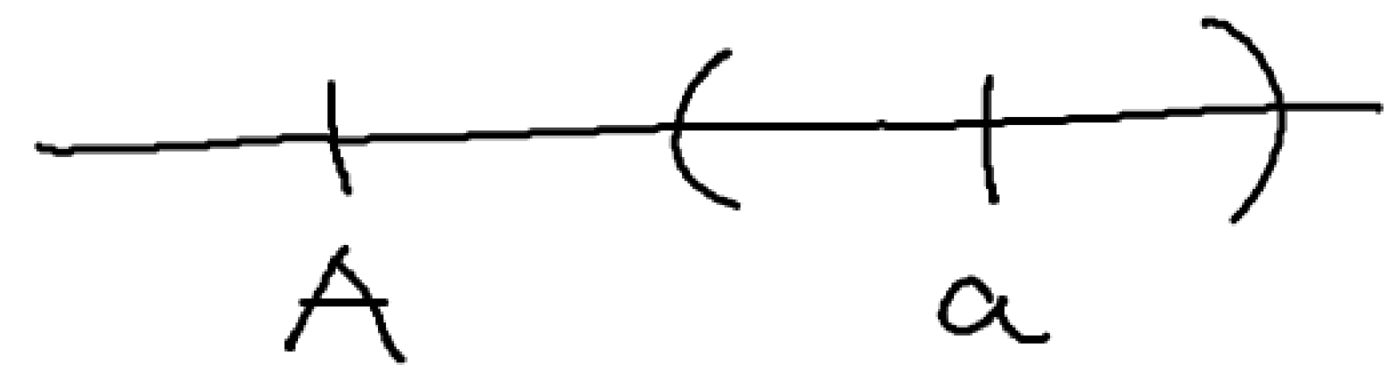
píšeme: $\underbrace{\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}_{P_1} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{x}}{x}}_{P_2} \to 1 \cdot (+\infty) = +\infty$

$P_1 \to 1$ (VoLSF: $g(y) = \frac{\sin y}{y}$, $f(x) = \sqrt{x}$)

$P_2 = \frac{1}{\sqrt{x}}$ (Věta 2.8,(1): $f(x) = \sqrt{x}$)

Věta 2.9 (Limita a $\leq$.) Nechť $f(x) \to a$ pro $x \to x_0$, nechť $\exists A \in \mathbb{R}$ t.ž. $f(x) \leq A$ na jistém $P(x_0)$. Potom $a \leq A$.

Dk. $\boxed{??}$ $A < a$



L.2.1 $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ t.ž. $A \notin U(a, \varepsilon)$

nutně A je umístěné nalevo (viz obrázek)

dále: $\exists \delta_1 > 0$ t.ž. $\forall x \in P(x_0, \delta_1)$

platí: $f(x) \in U(a, \varepsilon)$

$\exists \delta_2 > 0$ t.ž. $\forall x \in P(x_0, \delta_2)$

platí: $f(x) \leq A$

polož $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$\Rightarrow$ $f(x) \leq A$ & $f(x) \in U(a, \varepsilon)$

$\forall x \in P(x_0, \delta)$ ... $\boxed{\text{SPOR}}$

Věta 2.10. (O dvou policajtech)

Dk. ad (1) cíl: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ t.ž.

$x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(a, \varepsilon)$, neboli

$$a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon \quad (*)$$

víme: $\exists \delta_1 > 0$ t.ž. $x \in P(x_0, \delta_1)$

$\Rightarrow g(x) \in U(a, \varepsilon)$, speciálně

$a - \varepsilon < g(x)$

$\exists \delta_2 > 0$ t.ž. $x \in P(x_0, \delta_2)$

$\Rightarrow h(x) \in U(a, \varepsilon)$, a tedy

$h(x) < a + \varepsilon$

$\exists \delta_3 > 0$ t.ž. $x \in P(x_0, \delta_3)$

$\Rightarrow g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} \; \dots \; x \in P(x_0, \delta)$

$$\Rightarrow \underline{a - \varepsilon} < g(x) \leq \underline{f(x)} \leq h(x) < \underline{a + \varepsilon}$$

a tedy $(*)$ platí

ad (2) cíl: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.ž.

$$x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(+\infty, \varepsilon)$$

$$\text{tj. } f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$$

$\varepsilon > 0$ dáno: $\exists \delta_1 > 0$ t.ž. $x \in P(x_0, \delta)$

$$\Rightarrow g(x) \in U(+\infty, \varepsilon)$$

$$\text{tj. } g(x) > \frac{1}{\varepsilon}$$

$\exists \delta_2 > 0$ t.ž. $x \in P(x_0, \delta_2)$

$$\Rightarrow g(x) \leq f(x)$$

---

polož $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$$\ldots x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow \underset{\sim}{\frac{1}{\varepsilon}} < g(x) \leq \underset{\sim}{f(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < f(x)$$

---

ad (3) ... podobně jako (2), nebo přejdu k funkcím $\tilde{f}(x) = -f(x)$, $\tilde{g}(x) = -g(x)$

Příkl. (1) $\frac{x^2+1}{\lfloor x^2 \rfloor + 1} \to 1, \ x \to +\infty,$

kde $\lfloor y \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z}, k \le y\}$ je

tzv. „celá část" čísla $y \in \mathbb{R}$.

Platí: $\lfloor y \rfloor \le y < \lfloor y \rfloor + 1$, a tedy

$$x^2 \le \lfloor x^2 \rfloor + 1 \le x^2 + 1$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{x^2+1}{x^2+1}}_{\to 1} \le f(x) \le \underbrace{\frac{x^2+1}{x^2}}_{= 1 + \frac{1}{x^2} \to 1}$$

(2) $\cos x + x \to -\infty, \ x \to -\infty$

neboť: $\cos x \le 1$, a tedy

$$\cos x + x \le 1 + x \to -\infty$$

dle VoAL

Pozn. $\lim\limits_{x \to -\infty} \cos x \ \nexists$ (d.cv.)