Lemma 2.1 1. Nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$.

Pak $f(x)$ je omezené na jistém $P(x_0)$.

2. Nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = B \in \mathbb{R}^*$, $B \neq 0$.

Pak $|f(x)|$ je odražené od nuly na jistém $P(x_0)$.

Dk. 1. cíl: $\exists\, \delta>0$ t.ž. $f(x)$ omezené na $P(x_0,\delta)$

tj. $\exists\, \delta>0\ \exists\, C>0 : |f(x)| \le C$, $x\in P(x_0,\delta)$

víme: $f(x)\to A\in\mathbb{R}$, $x\to x_0$; polož $\varepsilon=1$

$\Rightarrow \exists\, \delta>0$ t.ž. $f(x)\in \mathcal{U}(A,1)$, $x\in P(x_0,\delta)$

$$\mathcal{U}(A,1) = (A-1,A+1) \subset (-C,C)$$

pro $C>0$ dost velké

2. cíl: $\exists\, \delta>0$ t.ž. $f(x)$ je na $P(x_0,\delta)$ odražené od nuly.

$\exists\, \Delta>0$ t.ž. $|f(x)|\ge\Delta$, $\forall x\in P(x_0,\delta)$.

víme: $f(x)\to B\in\mathbb{R}^*$, $B\neq 0$.

Věta 2.1 $\Rightarrow \exists\, \Delta>0$ t.ž. $\mathcal{U}(B,\Delta)\cap\mathcal{U}(0,\Delta)=\emptyset$

dále: $\exists\, \delta>0 : x\in P(x_0,\delta) \Rightarrow f(x)\in\mathcal{U}(B,\Delta)$

$\Rightarrow f(x)\notin\mathcal{U}(0,\Delta) = (-\Delta,\Delta) \iff |f(x)|\ge\Delta$ (L 1.1)

Věta 2.3 [VoAL – vlastní verze.]

Nechť $f(x) \to A$, $g(x) \to B$, $x \to x_0$. Potom:

(1) $f(x) + g(x) \to A + B$

(2) $f(x) - g(x) \to A - B$

(3) $f(x) \cdot g(x) \to A \cdot B$

(4) pokud $B \neq 0$, pak $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{A}{B}$, $x \to x_0$.

Dk. zápis s abs. hodn.:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ (*)

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon$ (**)

---

(1) cíl: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.ž. $x \in P(x_0, \delta)$

$\Rightarrow f(x) + g(x) \in \mathcal{U}(A + B, \varepsilon)$

neboli: $|f(x) + g(x) - (A+B)| < \varepsilon$

úvaha: $|f(x) + g(x) - (A+B)|$

$= |f(x) - A + g(x) - B| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B|$

víme: $f(x) \to A$, tj: $\exists \delta_1 > 0$ t.ž. $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$

$x \in P(x_0, \delta_1)$

$g(x) \to A$; tj: $\exists \delta_2 > 0$ t.ž. $|f(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$

$x \in P(x_0, \delta_2)$

polož $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ... $x \in P(x_0, \delta)$

$\Rightarrow |f(x) + g(x) - (A+B)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

---

(3) <u>TRIK</u>: $f(x) \cdot g(x) - A \cdot B \pm A \cdot g(x)$

$= (f(x) - A) \cdot g(x) + A \cdot (g(x) - B)$

$|f(x) \cdot g(x) - A \cdot B| \leq |f(x) - A| \cdot |g(x)| + |A| \cdot |g(x) - B|$

<u>víme</u>: $g(x) \to B \in \mathbb{R}$, $x \to x_0$

$\exists \delta_1 > 0$ t.ž. $|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2(|A|+1)}$, $x \in P(x_0, \delta_1)$

$\exists \delta_2 > 0 \ \exists C > 0$ t.ž. $|g(x)| \leq C$, $x \in P(x_0, \delta_2)$

($\mathcal{L}$. 2.1)

$\exists \delta_3 > 0$ t.ž. $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2C}$, $x \in P(x_0, \delta_3)$

polož $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$.

$\Rightarrow x \in P(x_0, \delta)$ je

$$|f(x) \cdot g(x) - A \cdot B| < \frac{\varepsilon}{2C} C + |A| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|A|+1)}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|A|}{|A|+1} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

nejprve (4)': $g(x) \to B \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{g(x)} \to \frac{1}{B}$

cíl: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0: x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow \frac{1}{g(x)} \in \mathcal{U}(\frac{1}{B}, \varepsilon)$

tj: $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| < \varepsilon$

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} = \frac{1}{g(x)\cdot B}\left(B - g(x)\right), \text{ tj}$$

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \frac{1}{|B|\cdot|g(x)|}\,|g(x) - B|$$

L 2.1, část 2: $\exists \Delta > 0, \delta_1 > 0$ t.ž.

$$|g(x)| \geq \Delta \quad , x \in P(x_0, \delta_1)$$

$$\frac{1}{|g(x)|} \leq \frac{1}{\Delta}$$

$g(x) \to B$: $\exists \delta_2 > 0$ t.ž. $|g(x) - B| < |B|\Delta\varepsilon$

$x \in P(x_0, \delta_2)$

polož $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

$\Rightarrow$ pro $x \in P(x_0, \delta)$ je

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| < \frac{1}{|B|}\cdot\frac{1}{\Delta}\cdot|B|\Delta\varepsilon = \varepsilon$$

(4) $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \underbrace{\frac{1}{g(x)}}_{\downarrow \; \frac{1}{B} \text{ dle } (4)'} \xrightarrow{\text{dle}(3)} A \cdot \frac{1}{B}$

Přikl. 1 $\frac{1}{x^2+1} \to \frac{1}{2}, \; x \to 1$

Věta 2.4 nechť $f(x)$ omezené na j. $P(x_0, \delta)$, nechť $g(x) \to 0, \; x \to x_0$. Pak $f(x) \cdot g(x) \to 0, \; x \to x_0$.

Dk. $\exists \delta_1 > 0 \; \exists C > 0$ t.ž. $|f(x)| \leq C, \; x \in P(x_0, \delta_1)$

$\exists \delta_2 > 0$ t.ž. $|g(x)| < \frac{\varepsilon}{C}, \; x \in P(x_0, \delta_2)$.

polož $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

pak $x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) \cdot g(x)| < C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$

---

cíl: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) g(x)| < \varepsilon$

Věta 2.5: $f(x)$ spojité v bodě x_0:

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x \to x_0} x\right)$

Příklady (spojitost fce)

① $\forall$ polynom $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$

je spojitý v $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, např. $p(x) = x^2 - 2x + 3$

$p(x) \to \underbrace{x_0^2 - 2x_0 + 3}_{p(x_0)}$, $x \to x_0$ dle Věty 2.3

$\Rightarrow$ spojité dle Věty 2.5

② racionální fce $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, p, q polynomy

je spojité v $\forall x_0 \in \mathbb{R}$:

t.ž. $q(x_0) \neq 0$ … $R(x) \to R(x_0)$ dle V. 2.5, (4)

a př. ① výše

③ $\sin x, \cos x, e^x$ … spojité v $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

$\log x$ … spojité v $\forall x_0 \in (0, +\infty)$

(důkaz později)

④ $f(x) = \sqrt{x}$ spojité v $\forall x_0 \in (0, +\infty)$

$x_0 > 0$ pevné, $\varepsilon > 0$ dáno:

? $\exists \delta > 0$ t.ž. $x \in U(x_0, \delta) \Rightarrow \sqrt{x} \in U(\sqrt{x_0}, \varepsilon)$

neboli $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Rightarrow \underbrace{\sqrt{x_0} - \varepsilon < \sqrt{x} < \sqrt{x_0} + \varepsilon}$

BÚNO: $\varepsilon > 0$ t.ž. $\sqrt{x_0} - \varepsilon \geq 0$ (*)

pak: (*) $\Longleftrightarrow$ $x_1 < x < x_2$, kde $x_1 = (\sqrt{x_0} - \varepsilon)^2$

$x_2 = (\sqrt{x_0} + \varepsilon)^2$

stačí volit $\delta = \min\{x_0 - x_1, x_2 - x_0\}$,

tj. $\mathcal{U}(x_0, \delta) \subset (x_1, x_2)$

(5) $\mathrm{sgn}(x)$ spojité všude mimo $x_0 = 0$

(i) $x_0 = 0$: nespojité, neboť $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} \mathrm{sgn}(x)$

(Věta 2.2; $\mathrm{sgn}(x) \to \pm 1$, $x \to 0\pm$)

(ii) $x_0 \neq 0$, nechť např. $x_0 < 0$:

$\mathrm{sgn}(x) = -1$ na jistém $\mathcal{U}(x_0, \delta)$

$\Rightarrow \mathrm{sgn}(x) \to -1 = \mathrm{sgn}(x_0)$, $x \to x_0$.

(6) $f(x) = x \cdot D(x)$, kde $D(x)$ Dirichletova fce

Sudím: $f(x)$ spojité pouze v $x_0 = 0$.

(i) $f(x) \to 0 = f(0)$, $x \to 0$ (Věta 2.4)

(ii) ?? $f(x)$ spojité v bodě $x_0 \neq 0$

$\Rightarrow f(x) \to f(x_0)$, $x \to x_0$

$\Rightarrow D(x) = \dfrac{f(x)}{x} \to \dfrac{f(x_0)}{x_0}$ (Věta 2.3, (4))

SPOR: $\lim\limits_{x \to x_0} D(x) \nexists$, viz výše...