Důsl. ① $\exists$ nejvýše 1 limita

$\boxed{??}$ $f(x) \to A,\ x \to x_0$ & $f(x) \to B,\ x \to x_0$

$A \neq B$

V.2.1 $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ t.ž. $\mathcal{U}(A,\varepsilon) \cap \mathcal{U}(B,\varepsilon) = \emptyset$

dle *) $\exists \delta_1 > 0$ t.ž. $x \in P(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(A,\varepsilon)$

**) $\exists \delta_2 > 0$ t.ž. $x \in P(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(B,\varepsilon)$

polož $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

BÚNO: navíc $\delta \leq \delta_0$, kde $\delta_0 > 0$ je t.ž. $f(x)$ je definována na $P(x_0, \delta_0)$

$x \in P(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(A,\varepsilon) \cap \mathcal{U}(B,\varepsilon) = \emptyset$

↯

BÚNO
t.ž.
??
SPOR ↯
fce Dz.

Triviia • $\lim_{x\to x_0} x = x_0$

• $\lim_{x\to x_0} C = C$ ← fce $x \mapsto C$

• $f(x) = g(x)$ na jistém $P(x_0,\delta)$

$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$

ve smyslu: $\exists$-li 1., $\exists$ 2. a = se

---

② Dirichletova fce $D(x) = \begin{cases} 1 ; x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$
(obr.?)

ukážeme: $\nexists \lim_{x\to x_0} D(x)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ lib.

$\neg\, D(x) \to A$, $x \to x_0$, kde $A \in \mathbb{R}^*$ děmo

$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0 : \underbrace{D(P(x_0,\delta))}_{=\{0,1\}} \not\subset U(A,\varepsilon)$

aneb: ; neboť $P(x_0,\delta) =$ obsahuje body z $\mathbb{Q}$ i mimo $\mathbb{Q}$ (obr.)

neboť $\varepsilon > 0$ 1.2. $U(A,\varepsilon)$ nelze 0 nebo 1 (viz V.1.2)

③ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, tj.

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0:\ x\in P(0,\delta) \Rightarrow \frac{1}{x^2}\in U(+\infty,\varepsilon)$

$0<|x|<\delta \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon}<\frac{1}{x^2}$

$\varepsilon>0$ dáno … polož $\delta=\sqrt{\varepsilon}$ (>0, Věta B)

$0<|x|<\delta=\sqrt{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}<\frac{1}{|x|}$

$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon}<\frac{1}{|x|^2}=\frac{1}{x^2}$

Příkl. ① funkce signum („znaménko")
[def + obrázek]

uvidíme: $\lim\limits_{x\to 0\pm} \operatorname{sgn}(x) = \pm 1$.

dk. (zprava): tj.:
$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0:\ x\in P_+(0,\delta) \Rightarrow \operatorname{sgn} x\in U(1,\varepsilon)$

$x\in(0,\delta)$, tedy $x>0$

$\operatorname{sgn} x = 1 \in U(1,\varepsilon)$

② $\lim\limits_{x\to 0\pm} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \pm\infty$, jen případ $x\to 0-$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : x \in P_-(0,\delta) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \in \mathcal{U}(-\infty,\varepsilon)$$

$$-\delta < x < 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x}} < -\frac{1}{\varepsilon}$$

$\varepsilon>0$ dáno, polož $\delta = \varepsilon^3$

$$-\varepsilon^3 < x < 0 \Rightarrow \underbrace{\sqrt[3]{-\varepsilon^3}}_{-\varepsilon} < \sqrt[3]{x} < 0$$

(!! $\sqrt[3]{y}$ liché, rostoucí...)

<u>Věta 2.2</u> (1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$

$\Leftrightarrow$ (2) $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = A = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$

<u>Dk.</u> (1) $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : x \in P(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(A,\varepsilon)$

(2) $\Leftrightarrow$ (2a) $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : x \in P_+(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(A,\varepsilon)$

&

(2b) $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : x \in P_-(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(A,\varepsilon)$

---

zřejmé (1) $\Rightarrow$ (2a), (2b), neboť $P_\pm(x_0,\delta) \subset P(x_0,\delta)$

(2) $\overset{?}{\Rightarrow}$ (1) : víme, že $P(x_0,\delta) = P_+(x_0,\delta) \cup P_-(x_0,\delta)$

$\varepsilon > 0$ dáno:

dle (2a): $\exists\, \delta_1 > 0$ t.ž. $x \in P_+(t_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(A, \varepsilon)$

dle (2b): $\exists\, \delta_2 > 0$ t.ž. $x \in P_-(t_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(A, \varepsilon)$

polož $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, pak platí

$$x \in P(t_0, \delta) \Rightarrow x \in P_-(t_0, \delta) \vee x \in P_+(t_0, \delta)$$

a tedy $f(x) \in \mathcal{U}(A, \varepsilon)$

díky (*) nebo (**).

<u>Věta 2.5.</u> (1) $f(x)$ spojitá v bodě t_0

$\Leftrightarrow$ (2) $f(x) \to f(t_0)$, $x \to t_0$.

<u>Dk.</u> (1) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: x \in \mathcal{U}(t_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(f(t_0), \varepsilon)$

(2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $\quad P(t_0, \delta)$

tedy zřejmě (1) $\Rightarrow$ (2), neboť "$P \subset \mathcal{U}$"

(2) $\Rightarrow$ (1): $\mathcal{U}(t_0, \delta) = P(t_0, \delta) \cup \{t_0\}$

ale: $f(t_0) \in \mathcal{U}(f(t_0), \varepsilon)$ <u>vždy</u>.