**Věta 1.2.** Existují iracionální čísla.

Dk. Věta B $\Rightarrow$ $\exists x>0$ s.ž. $x^2=3$; ukážeme, že $x\notin\mathbb{Q}$

?? (sporem) nechť $x=\dfrac{p}{q}$, $p,q\in\mathbb{N}$ BÚNO: nesoudělná (jinak zkrátíme)

$\Rightarrow$ $p = x\cdot q$

$p^2 = x^2q^2 = 3q^2$ $\Rightarrow$ 3 dělí $p^2$ (tj. $p^2$ je násobek 3)

---

pomocná úvaha: 3 dělí $p^2$ $\Rightarrow$ 3 dělí $p$

Dk. lze psát $p = 3k + \ell$, $k\in\mathbb{Z}$, $\ell\in\{0,1,2\}$

$p^2 = (3k+\ell)^2 = 9k^2+6k\ell+\ell^2$

$\Rightarrow$ $\underbrace{p^2-9k^2-6k\ell}_{LS} = \ell^2$ ... 3 dělí $LS$

$\Rightarrow$ 3 dělí $\ell^2$

| $\ell$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $\ell^2$ | 0 | 1 | 4 |

nedělitelné 3

$\Rightarrow$ nutně $\ell = 0$

tj. $p = 3k$

---

dokončení: $p = 3k$

$p^2 = 9k^2 = 3q^2$

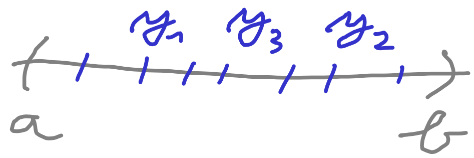
$\Rightarrow$ $q^2 = 3k^2$, tedy 3 dělí $q^2$

pomocná úvaha $\Rightarrow$ 3 dělí $q$ ↯ (SPOR)

**Věta 1.3.** Každý interval $I=(a,b)$ obsahuje nekonečně mnoho racionálních a nekonečně mnoho iracionálních čísel.

Dk. pro iracionální (racionální podobně)

BÚNO: 1. stačí jedno číslo (+ opakování)




2. stačí pro $0 \le a < b$, neboť:

(i) $a < b \le 0 \Rightarrow$ přejdu k $\tilde{I} = (-b,-a)$

(ii) $a < 0 < b \Rightarrow$ přejdu k $\tilde{I} = (0,b)$

stačí tedy: $\exists\, y_1 \in (a,b)$, $y_1 \notin \mathbb{Q}$, navíc platí $0 \le a < b$

1. fixuji $n \in \mathbb{N}$ s.ž. $\boxed{\frac{\sqrt{3}}{n} < b-a}$ $\left(\iff n > \frac{\sqrt{3}}{b-a}\right)$
2. buď $m \in \mathbb{N}$ nejmenší s.ž. $\boxed{\frac{m}{n}\sqrt{3} \ge b}$

$\Rightarrow$ polož $\boxed{y_1 := \frac{m-1}{n}\sqrt{3}}$

pozoruji: • $m \ge 2$ (neboť $\frac{1}{n}\sqrt{3} < b-a \le b$)

• $y_1 \in (a,b)$ neboť $y_1 = \underbrace{\frac{m}{n}\sqrt{3}}_{\ge b} - \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{n}}_{< b-a}$

• $y_1 \notin \mathbb{Q}$ (jinak $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$)