1. Úvod. Reálná čísla.

Značení. P, Q … výroky, x, y, z prvky, A, B, M … množiny

$P \& Q$ … P a zároveň Q

$P \vee Q$ … P nebo Q

$P \Rightarrow Q$ … P implikuje Q

$P \Leftrightarrow Q$ … P je ekvivalentní Q

$\neg P$ … negace P

$x \in M$ … x je prvkem M

$\forall x \in A$ … pro každé x v A

$\exists x \in B$ … existuje x v B

$\exists! x \in B$ … existuje jediné x v B

$A \subset B$ … A je částí (podmnožinou) B

$\{a_1, a_2, \dots a_N\}$ … množina s prvky $a_1, \dots a_N$

$\{x \in M;\ \varphi(x)\}$ … prvky M s vlastností φ

$\emptyset$ … prázdná množina, též $\{\}$.

$A \cup B$ … sjednocení A, B

$A \cap B$ … průnik A, B

$A \setminus B$ … rozdíl množin.

Věta A.1 (Aritmetika $\mathbb{R}$). Existuje množina $\mathbb{R}$, prvky $0, 1 \in \mathbb{R}$ a operace '·' (krát) a '+' (plus), t. ž. platí (pro $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$):

(i) $x+y = y+x$, $x\cdot y = y\cdot x$ (komutativita)

(ii) $x+(y+z) = (x+y)+z$, $x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$ (asociativita)

(iii) $x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$ (distributivita)

(iv) $0+x = x$, $1\cdot x = x$

(v) $0\cdot x = 0$, a naopak: $x\cdot y = 0 \Rightarrow x=0 \vee y=0$

(vi) $\forall x, z \in \mathbb{R}\ \exists!\ w \in \mathbb{R}: x+w = z$; značíme $w = z-x$

(vii) $\forall z \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0\ \exists!\ w \in \mathbb{R}: x\cdot w = z$, značíme $w = \frac{z}{x}$.

Pozn. $-x$ .. zkratka za $0-x$

x^{-1} .. $\frac{1}{x}$

Z (i)–(vii) plyne vše ostatní, např. $-(-x) = x$

$(-x)\cdot y = -(x\cdot y)$.

$$-(x\cdot y) = w \iff x\cdot y + w \overset{?}{=} 0$$

$$x\cdot y + (-x)\cdot y = 0 \quad 2(i)$$

$$y\cdot x + y\cdot(-x) = 0 \quad (iii)$$

$$y\cdot \underbrace{(x+(-x))}_{\substack{\| \\ 0}} = 0$$

$$y\cdot 0 = 0 \quad (i)$$

$$0 = 0\cdot y = 0$$

$$\uparrow$$
$$v$$

$$-(-x) \overset{?}{=} x$$

$$(-x) + w = 0$$

$$-x + x = 0$$

$$x + (-x) = 0$$

Věta A2 (Uspořádání $\mathbb{R}$) Na $\mathbb{R}$ je definována relace "$<$" (menší než) tak, že platí $(\forall x, y, z)$:

(i) nastane právě jedna z možností: (trichotomie)

$x < y$ nebo $y < x$ nebo $x = y$

(ii) $x < y$ & $y < z \Rightarrow x < z$ (tranzitivita)

(iii) $x < y \Rightarrow x + z < y + z$

(iv) $0 < x$ & $0 < y \Rightarrow 0 < x \cdot y$

Pozn. ∘ $x \leq y$ ... zkratka za $x < y \vee x = y$

$x > y$ ... -"- $y < x$

∘ Lze vyvodit ostatní známé vzorce, např.

$x^2 \geq 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$

$x < 0$ & $y < 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$.

$x < 0 \quad | + (-x)$

$0 < -x$ dle (iii)

$0 < -y$ -"-

$0 < \underbrace{(-x) \cdot (-y)}$ dle (iv)

$-(x \cdot (-y)) = -((-y) \cdot x)$

$= -(-(y \cdot x))$

$= x \cdot y$

$x < y$, $z < w \Rightarrow x + z < y + w$

$x < y \quad |$ dle (iii)

$x + z < y + z$

$z < w$ dle (iii)

$z + y < w + y$

dle (ii)

$x + z < w + y$

Značení. (Význačné podmnožiny $\mathbb{R}$.)

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ přirozená čísla

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, \dots\}$ celá čísla

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,;\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$ racionální čísla

---

intervaly: s krajními body $a < b \in \mathbb{R}$:

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,;\, a < x < b\}$ otevřený

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,;\, a \leq x \leq b\}$ uzavřený

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,;\, a < x \leq b\}$

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,;\, a \leq x < b\}$

---

neomezené intervaly:

$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,;\, x > a\}$

$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,;\, x \geq a\}$

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \,;\, x < b\}$

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \,;\, x \leq b\}$

Def. Pro $x \in \mathbb{R}$ definuji absolutní hodnotu

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{pokud } x \geq 0 \\ -x, & \text{pokud } x < 0. \end{cases}$$

Pozn. $|x| \geq 0$, navíc $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$|-x| = |x|$

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$

Lemma 1.1 Nechť $a \geq 0$, $b \in \mathbb{R}$ libovolné.
Potom $|b| \leq a \iff -a \leq b \leq a$.

Dk. „rozborem případů"

1. $b \geq 0$, tj. $|b| = b$, tj. hledáme:

$$b \leq a \iff -a \leq b \leq a$$

$$\boxed{-a \leq b} \;\&\; b \leq a$$

platí automaticky: $LS \leq 0$, $PS \geq 0$.

$b \leq a \iff b \leq a$, zřejmé.

2. $b < 0$, tj. $|b| = -b$, chceme tedy

$$-b \leq a \iff -a \leq b \;\&\; \boxed{b \leq a}$$

platí, neb. $LS < 0$, $PS \geq 0$

$$-b \leq a \iff -a \leq b$$

také jasné.

Věta 1.1 (Trojúhelníková nerovnost)
Pro $\forall x, y \in \mathbb{R}$ platí: (i) $|x \pm y| \leq |x| + |y|$

(ii) $|x \pm y| \geq \big||x| - |y|\big|$

Dk. (i) $|x| \leq |x|$, užiji L. 1.1 pro $a = |x|$, $b = x$

$-|x| \leq x \leq |x|$

$-|y| \leq \pm y \leq |y|$ ... analogicky $a = |\pm y| = |y|$, $b = \pm y$

$-|x|-|y| \le x \pm y \le |x|+|y|$

$-\underbrace{(|x|+|y|)}_{a} \le \underbrace{x \pm y}_{b} \le \underbrace{(|x|+|y|)}_{a}$

Lemma 1.1, pro $a = |x|+|y|$ $\Longrightarrow$ $|x \pm y| \le |x|+|y|$
$b = x \pm y$

(ii) TRIK: $-y = x - (x \pm y)$

$|y| = |x-(x+y)| \le |x| + |x+y|$

viz (i)

$|y| - |x| \le |x+y|$

analogicky (prohodím x, y)

$|x| - |y| \le |y+x|$

celkem:

$-|x+y| \le |x|-|y| \le |x+y|$

L. 1.1; $a = |x+y|$ $\Longrightarrow$ $||x|-|y|| \le |x+y|$.
$b = |x|-|y|$

případ $x-y$ .. podobně. (d.ú.)

~~Věta 1.2 Existují iracionální čísla.~~

Věta B (Odmocnina v $\mathbb{R}$.)

~~1. Nechť $m \in \mathbb{N}$ je sudé, $a \ge 0$. Pak $\exists!\, b \in [0, +\infty)$ t.ž. $b^m = a$.~~

~~2. Nechť $m \in \mathbb{N}$ je liché, $a \in \mathbb{R}$. Pak $\exists!\, b \in \mathbb{R}$ tž $b^m = a$.~~

Věta B [Odmocnina v $\mathbb{R}$.]

1. nechť $n \in \mathbb{N}$ je sudé. Pak $\forall a \in [0,+\infty)\ \exists!\, b \in [0,+\infty)$
t.ž. $b^n = a$.

2. nechť $n \in \mathbb{N}$ je liché. Pak $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists!\, b \in \mathbb{R}$
t.ž. $b^n = a$.

Toto b se nazve n-tá odmocnina z a, značí se $\sqrt[n]{a}$.

Dk. později.

Pozn. • $\sqrt{1} = \sqrt[2]{1} = 1$, $\sqrt[3]{-1} = -1$
$\sqrt{-1}$ ... není def. (žádné „i")
• POZOR: $\sqrt{x^2} = |x|$; tj. $\sqrt{x^2} = x$ pro $x \geq 0$
$= -x$ pro $x < 0$.
$\sqrt[n]{x^n} = x$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$, n liché

Věta 1.2 Existují iracionální čísla.

Dk. Věta B $\Rightarrow \exists!\, x > 0$ t.ž. $x^2 = 3$; ukážeme, že
$x \notin \mathbb{Q}$.

?? (sporem) nechť $x = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$
BÚNO (bez újmy na obecnosti)
nesoudělná (jinak zkrátíme)

$p = x \cdot q$
$p^2 = x^2 q^2 = 3q^2$, tedy 3 dělí p^2 (tj. p^2 je násobek 3)

---

pomocná úvaha: 3 dělí $p^2 \Rightarrow$ 3 dělí p

Dk. lze psát $p = 3k + l$, $k \geq 0$ celé
$l \in \{0,1,2\}$ ... zbytek po dělení 3
$p^2 = 9k^2 + 6kl + l^2$
$p^2 - 9k^2 - 6kl = l^2$ ... 3 dělí LS; tj.
3 dělí PS,

3 dělí l^2:

l	0	1	2
l^2	0	1	4

$\underbrace{1 \quad 4}_{\text{nedělitelné 3}}$

možné $l = 0$

tj. $r = 3s$

3 dělí r.

$r = 3s$

$r^2 = \underbrace{9s^2 = 3q^2} \Rightarrow q^2 = 3s^2$, tj. 3 dělí q^2

opět dle pomocné úvahy

3 dělí q ↯

Věta A.3 (Vlastnosti $\mathbb{N}$.)

(i) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : x < n$ (Archimédova vl.)

(ii) nechť $M \subseteq \mathbb{N}$ splňuje 1. $1 \in M$

2. $\forall n \in \mathbb{N} : n \in M \Rightarrow n+1 \in M$

Potom $M = \mathbb{N}$. (princip indukce)

Pozn.: ∘ Archimédes $\Leftrightarrow$ Eudoxos: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : n \cdot \varepsilon > 1$.

∘ indukce: jiné formulace (ekvivalentní)

nechť pro $n_0 \in \mathbb{N}$ a formuli $\varphi(n)$ („vlastnost" z. č.)

platí: 1. $\varphi(n_0)$

2. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1)$.

Potom $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \varphi(n)$.

Př.: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4 : n^2 \leq 2^n$. ; $n_0 = 4$

$\varphi(n) \equiv n^2 \leq 2^n$.

dk.: z. i. stačí: 1. $4^2 \leq 2^4$

2. $n^2 \leq 2^n \Rightarrow (n+1)^2 \leq 2^{n+1}$, $\forall n \geq 4$.