Věta 9.2 (dokončení důkazu)

2\. ... snadné, z následujících faktů:

$$S(D^m, f) - s(D^m, f) \to 0, \quad \|D^m\| \to 0$$

(dle bodu 1.)

$$s(D^m, f) \leq (R)\int_a^b f \leq S(D^m, f)$$

(viz Lemma 9.1)

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i, \quad i = 1, \dots n$$

a tedy $s(D^m, f) \leq \mathcal{S}(D^m, f) \leq S(D^m, f)$

Věta 9.3 (Linearita R.i.) Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, nechť $f, g \in C([a,b])$. Potom:

$$(R)\int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \cdot (R)\int_a^b f + \beta \cdot (R)\int_a^b g.$$

Dk.: buď D^m dělení t.ž. $\|D^m\| \to 0$.

$$\mathcal{S}(D^m, \alpha f + \beta g) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(\alpha f + \beta g)(\xi_i)}_{\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)} (x_i - x_{i-1})$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \beta \sum_{i=1}^{m} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

dle Věty 9.2 (a VoAL): LS $\to (R)\int_a^b \alpha f + \beta g$

PS $\to \alpha (R)\int_a^b f + \beta (R)\int_a^b g$.

- -

<u>Věta 9.4</u>. Nechť $f \in C([a,c])$, $b \in (a,c)$.

Pak $(R)\int_a^b f + (R)\int_b^c f = (R)\int_a^c f$.

- - - -

<u>Dk.</u> buďte D^m dělení $[a,c]$ t.ž. $\|D^m\| \to 0$.

BÚNO: $b \in D^m \Rightarrow D^m = \underbrace{D_1^m}_{\substack{\text{dělení} \\ [a,b]}} \cup \underbrace{D_2^m}_{\substack{\text{dělení} \\ [b,c]}}$

<u>zřejmě</u>: $\underbrace{S(D^m, f)}_{\downarrow \atop (R)\int_a^c f} = \underbrace{S(D_1^m, f)}_{\downarrow \atop (R)\int_a^b f} + \underbrace{S(D_2^m, f)}_{\downarrow \atop (R)\int_b^c f}$

… dle Věty 9.2 … pro $\|D^m\| \to 0$

Pozn. Závěr pro libovolné $a, b, c \in [\alpha, \beta]$,

je-li $f \in C([\alpha, \beta])$.

Dk.: $a < b < c$ ... jasné

$a = b < c$ ... $LS = \underbrace{\int_a^a f}_{= 0} + \int_a^c f = PS$

$b < a < c$ ... $LS = \int_a^b f + \int_b^c f$

$= -\cancel{\int_b^a f} + \left(\cancel{\int_b^a f} + \int_a^c f \right) = PS$

... ostatní případy podobně ...

Věta 9.5 (Monotonie R. i.)

1. buďte D^m dělení t. ž. $\|D^m\| \to 0$.

máme: $S(D^m, f) = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$

$\geq \sum_{i=1}^{m} g(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$

... a uděláme limitu ...

$= S(D^m, g)$

2. pomocí L. 1.1 a bodu 1.:

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$$

$$\underbrace{\int_a^b -|f|}_{-\int_a^b |f|} \le \int_a^b f \le \int_a^b |f|$$

$$\overset{L.1.1}{\Longrightarrow} \quad \left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$$

Věta 9.6 (R.i. s proměnnou mezí)

nechť $f \in C(I)$, $I \subset \mathbb{R}$ interval; $x_0 \in I$.

Polož $F(x) = (R)\int_{x_0}^{x} f(u)$; $x \in I$.

Potom: 1. $F \in C(I)$

2. $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$ vnitřní

Dk. $F(x)$ má smysl $(f \in C([x_0, x]))$

ad 1. (spojitost) ... stačí v $[\alpha, \beta] \subset I$

dle Věty 6.1: $\exists K > 0$ t.ž.

$$|f(x)| \le K, \ \forall x \in [\alpha, \beta]$$

$$F(y) = \int_{x_0}^{y} f = \int_{x_0}^{x} f + \int_{x}^{y} f = F(x) + \int_{x}^{y} f$$

(... dle Věty 9.4 + dodatku)

$$\Rightarrow |F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f \right| \leq \int_x^y |f| \leq K \underbrace{(y-x)}_{|y-x|}$$

(BÚNO $x \leq y$)

(Věta 9.5)

... odsud zřejmě spojitost $F(x)$ v $[\alpha, \beta]$.

$\varepsilon > 0$ dáno: polož $\delta = \dfrac{\varepsilon}{K}$.

ad 2. (derivace)

cíl: $\dfrac{1}{h}\left(F(x+h) - F(x)\right) \to f(x)$, $h \to 0$

pro $x \in I$ vnitřní, zejmé

fixuji x; BÚNO $h \neq 0$ t.ž. $x+h \in I$

platí (podobně jako v bodě 1.):

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(u)\,du$$

... upravíme PS následovně:

$$\int_x^{x+h} f(u)\,du = \int_x^{x+h} f(x) + f(u) - f(x)\,du$$

$$= \underbrace{\int_x^{x+h} f(x)\,du}_{h\cdot f(x)} + \underbrace{\int_x^{x+h} f(u) - f(x)\,du}_{R(h)}$$

Celkem: $\frac{1}{h}\big(F(x+h) - F(x)\big) = f(x) + \frac{R(h)}{h}$

stačí tedy ukázat: $\frac{R(h)}{h} \to 0,\ h \to 0.$

$\varepsilon > 0$ dáno ... spojitost f v bodě x

$\Rightarrow \exists\, \delta > 0$ t.ž. $f(u) \in \mathcal{U}(f(x), \varepsilon)$

pro $\forall\, u \in \mathcal{U}(x, \delta)$

neboli $|f(u) - f(x)| < \varepsilon$ pokud $|u - x| < \delta$

nechť $h \in P(0, \delta)$ ...

$$\left|\frac{R(h)}{h}\right| \leq \frac{1}{|h|}\int_x^{x+h} \underbrace{|f(u) - f(x)|}_{< \varepsilon} < \underbrace{\frac{1}{|h|}\cdot \varepsilon |h|}_{= \varepsilon}.$$

(neboť $|u - x| < |h| < \delta$)

Důsledky

① f spojité v $(a,b) \Rightarrow f$ má v (a,b) p.f.

dk. polož $F(t) = (R)\int_{t_0}^{t} f(u)\,du$, $t_0 \in (a,b)$ pevné

Věta 9.6. $\Rightarrow F'(t) = f(t)$, $\forall t \in (a,b)$

② f spoj. v $[a,b] \Rightarrow (N)\int_a^b f = (R)\int_a^b f$.

dk. polož $F(t) = (R)\int_a^t f(t)\,dt$, $t \in [a,b]$.

dle V. 9.6: $F'(t) = f(t)$, $\forall t \in (a,b)$

navíc $F(t)$ spojité v $[a,b]$

$$\Rightarrow (N)\int_a^b f(t)\,dx = \big[F(t)\big]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$= (R)\int_a^b f - 0.$$

③ $f \in C^1(a,b) \Rightarrow f(t_1) - f(t_0) = (R)\int_{t_0}^{t_1} f'(u)\,du$

pro $\forall t_0, t_1 \in (a,b)$

dk. polož $H(t) = \int_{t_0}^{x} f'(u)\,du - f(t)$

$\Rightarrow H'(t) = 0$ v (a,b), tedy $H(t) = c$ ...