Lemma 9.1. Buď f omezená v $[a,b]$. Pak:

(1) $D \subset \widetilde{D} \Rightarrow s(D,f) \leq s(\widetilde{D},f)$

$$S(D,f) \geq S(\widetilde{D},f)$$

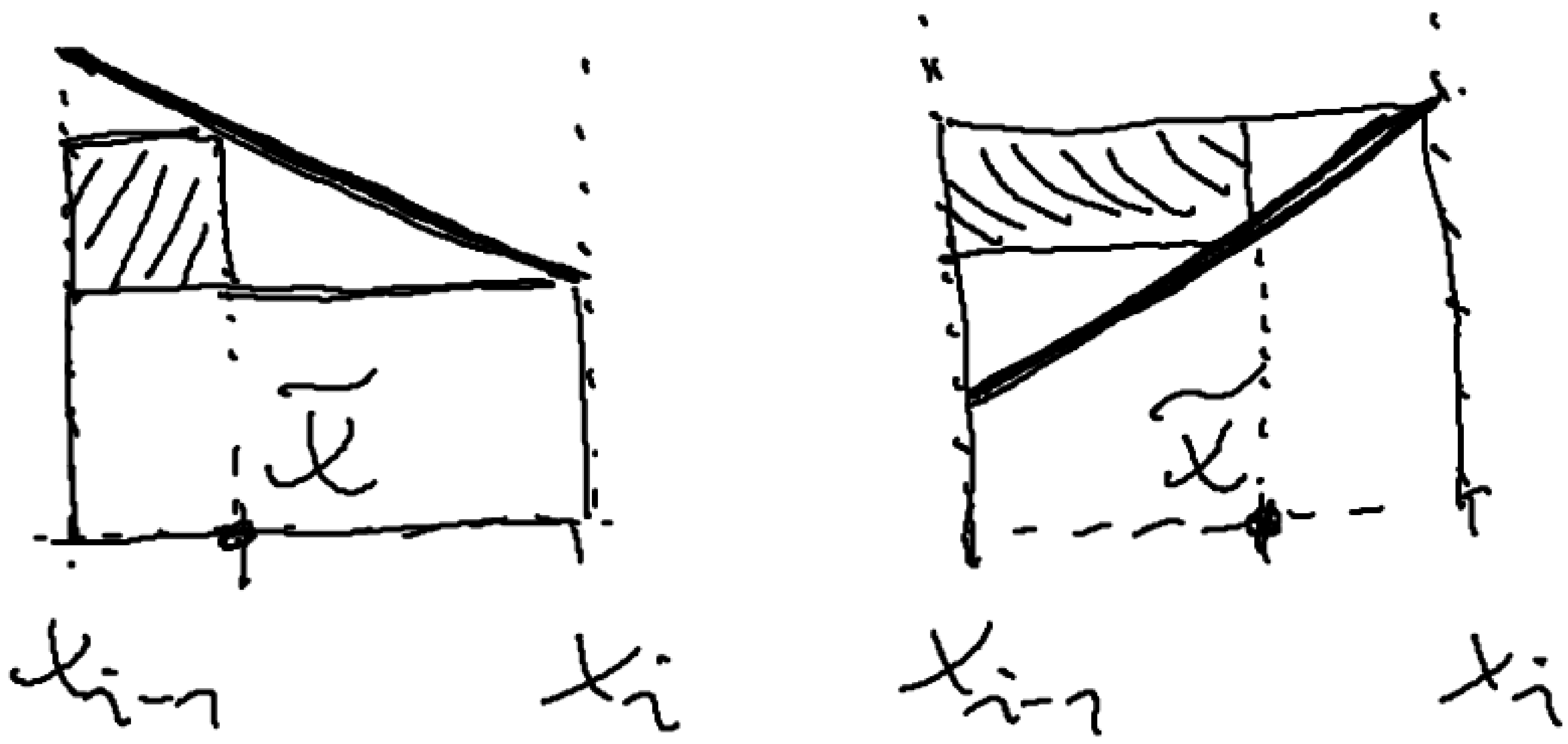
(2) $m(b-a) \leq s(D_1,f) \leq S(D_2,f) \leq M(b-a)$,

kde $m = \inf f([a,b])$, $M = \sup f([a,b])$.

Dk. (1)

BÚNO:

$\widetilde{D} = D \cup \{\widetilde{x}\}$



(2) $D_0 : x_0 = a < b = x_1$ (triviální dělení)

$\widetilde{D} = D_1 \cup D_2$ (společné zjemnění)

zřejmě: $D_0 \subset D_1, D_2 \subset \widetilde{D}$

dle (1) $\Rightarrow$ $m(b-a) = s(D_0,f)$

$$\leq s(D_1,f) \leq s(\widetilde{D},f) \leq S(\widetilde{D},f)$$

$$\leq S(D_0,f) = M(b-a).$$

Důsl.: $c_1 \le f(x) \le c_2$, $\forall x \in [a,b]$

$$\Rightarrow c_1(b-a) \le (R)\underline{\int_a^b} f \le (R)\overline{\int_a^b} f \le c_2(b-a);$$

speciálně: $f(x) = c \Rightarrow (R)\int_a^b f = c(b-a)$.

- - - - -

Dk. $c_1 \le m = \inf f([a,b])$ D_1, D_2

$c_2 \ge M = \sup f([a,b])$ libovolné:

$$\Rightarrow \underbrace{c_1(b-a) \le s(D_1,f)}_{\text{supremum přes } D_1 \ (D_2 \text{ pevné})} \le S(D_2,f) \le c_2(b-a)$$

$$\Rightarrow c_1(b-a) \le \underbrace{(R)\underline{\int_a^b} f \le S(D_2,f)}_{\text{infimum přes } D_2} \le c_2(b-a)$$

$\Rightarrow$ jsem hotov

Speciálně: $f(x) = c$; $\forall x \in [a,b]$.

$$\Rightarrow s(D,f) = S(D,f) = c(b-a) \ \forall D$$

a odsud: $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = c(b-a)$.

Lemma 9.2 $f \in R(a,b)$ právě když

$\forall \eta > 0 \; \exists$ dělení D : $S(D,f) - s(D,f) < \eta$.

Dk. ad „$\Leftarrow$" ... víme (pro $\forall D$)

$$s(D,f) \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le S(D,f)$$

$$0 \le \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \le \underbrace{S(D,f) - s(D,f)}$$

libovolně malé díky (P.R.)

$$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f = 0.$$

----

ad „$\Rightarrow$": $\eta > 0$ dáno:

$$\int_a^b f - \eta/2 < \underline{\int_a^b} f = \sup\{s(D,f),\ D \text{ děl.}\}$$

... vlastnost (ii) supremu $\Rightarrow \exists D_1$ dělení t.ž.

$$s(D_1,f) > \int_a^b f - \eta/2$$

... analogicky: $\exists D_2$ dělení t.ž.

$S(D_2,f) < \overline{\int_a^b} f + \eta/2$, nechť $D = D_1 \cup D_2$ (společné zjemnění ...)

$L.9.1 \Rightarrow s(D_1,f) \leq s(D,f)$
$$\leq S(D,f) \leq S(D_2,f)$$

a tedy dle předchozího:

$$\underline{\int_a^b} f - \eta/2 < s(D,f) \leq S(D,f) < \overline{\int_a^b} f + \eta/2$$

$$S(D,f) - s(D,f) < \left(\overline{\int_a^b} f + \eta/2\right) - \left(\underline{\int_a^b} f - \eta/2\right)$$
$$= \underbrace{\left(\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f\right)}_{=0} + \eta$$

0, neboť: $f \in R(a,b)$.

<u>Věta 9.1</u>. Nechť je f v $[a,b]$ omezená, monotónní. Pak $f \in R(a,b)$.

<u>Dk.</u> TRIK: D^n ... dělení $\underline{n}$ stejných dílů

tj.: $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$, $i = 0, \dots n$

BÚNO: $f(x)$ neklesající, tj.:

$$m_i = \inf f([x_{i-1}, x_i]) = f(x_{i-1})$$
$$M_i = \sup f([x_{i-1}, x_i]) = f(x_i)$$

$$\Rightarrow S(D^n, f) - s(D^n, f)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(M_i - m_i)}_{\substack{\shortparallel \\ f(x_i) - f(x_{i-1})}} \cdot \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\substack{\shortparallel \\ \frac{b-a}{n}}}$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1}) \right)$$
$$= \frac{b-a}{n} \cdot \left\{ \left(\cancel{f(x_1)} - \underline{\underline{f(x_0)}} \right) + \left(\cancel{f(x_2)} - \cancel{f(x_1)} \right) + \dots + \left(\underline{\underline{f(x_n)}} - \cancel{f(x_{n-1})} \right) \right\}$$
$$= \frac{b-a}{n} \left(f(x_n) - f(x_0) \right) = \frac{1}{n}(b-a) \cdot (f(b) - f(a)).$$

$\eta > 0$ dáno: vol $n \in \mathbb{N}$ t.ž.

$$\frac{1}{n}(b-a)(f(b)-f(a)) < \eta$$

$\Rightarrow$ (P.R.) platí: polož $D = D^n$.

<u>Lemma 9.3</u>. Nechť f je spojité v $[a,b]$.

Pak: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in [a,b]$:

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon .$$

<u>Dk</u>: $\boxed{??}$ $\exists \varepsilon > 0$ t.ž.:

$\forall \delta > 0 \ \exists x, y \in [a,b] : |x-y| < \delta$

leč přitom: $|f(x)-f(y)| \geq \varepsilon$.

užiji pro $\delta = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$

$\Rightarrow \exists \ x_n, y_n \in [a,b)$ t.ž. platí:

$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, leč $|f(x_n)-f(y_n)| \geq \varepsilon$

pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

BÚNO: $x_n \to x_0$, kde $x_0 \in [a,b]$

(díky Větě 7.4)

seny také $y_n \to x_0$ (neb $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$)

Věta 7.7. (Heine) $\Rightarrow$ $f(x_n) \to f(x_0)$

$f(y_n) \to f(x_0)$

dle VoAL: $f(x_n) - f(y_n) \to 0$

leč: $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon \ \forall n$

SPOR

Věta 9.2 $[f \in C([a,b]) \Rightarrow f \in R(a,b).]$

1. díky L.9.2 stačí ověřit (P.R.)

$\eta > 0$ dáno ... díky L.9.3 $\exists \delta > 0$ t.ž.

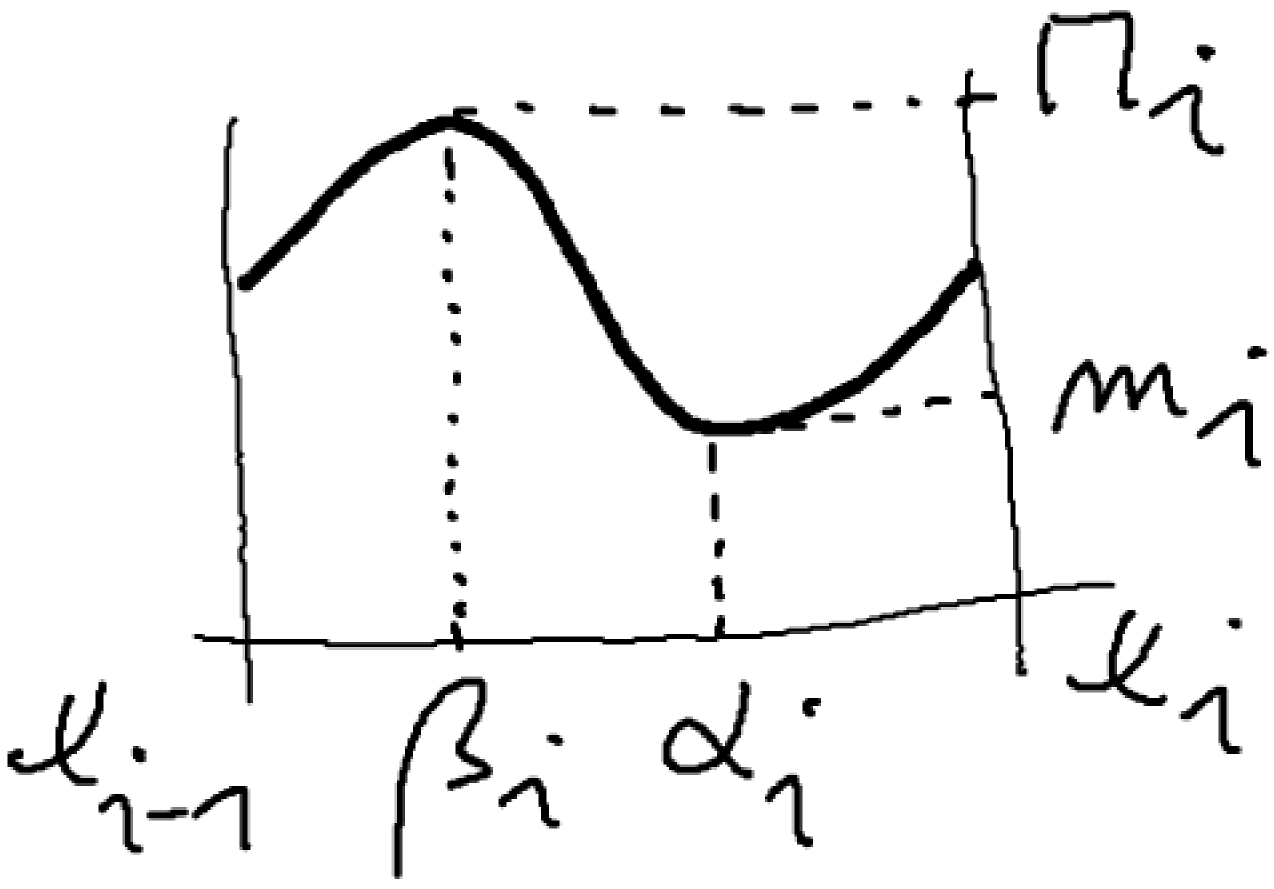
$\forall x, y \in [a,b]$ t.ž. $|x-y| < \delta$

platí $|f(x) - f(y)| < \frac{\eta}{b-a}$

... buď D^m dělení t.ž. $\|D^m\| < \delta$

$D^m: \; t_0 = a < t_1 < t_2 \cdots < t_m = b$

dle Věty 6.2 … $\exists\, \alpha_i, \beta_i \in [t_{i-1}, t_i]$



t.ž. $f(\alpha_i) = m_i$

$f(\beta_i) = M_i$

víme: $|\beta_i - \alpha_i| \le |t_{i-1} - t_i| \le \|D^m\| < \delta$

$$\Rightarrow M_i - m_i = f(\beta_i) - f(\alpha_i) < \frac{\eta}{b-a}$$

a tedy: $S(D^m, f) - s(D^m, f)$

$$= \sum_{i=1}^{m} \underbrace{(M_i - m_i)}_{< \frac{\eta}{b-a}} (t_i - t_{i-1})$$

$$< \frac{\eta}{b-a} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{m} (t_i - t_{i-1})}_{= b-a} = \eta$$