Věta 7.5. Následující je ekvivalentní:

(1) $\{a_n\}$ konverguje

(2) $\{a_n\}$ je cauchyovské

Dk. $(1) \Rightarrow (2)$ ... víme: $a_n \to a \in \mathbb{R}$

$\varepsilon > 0$ dáno: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.ž. $\forall n \geq n_0$:

$$a_n \in U(a, \varepsilon/2)$$

tj. $|a_n - a| < \varepsilon/2$

$\Rightarrow \forall m, n \geq n_0$ lze psát:

$$a_m - a_n = (a_m - a) + (a - a_n)$$

$$|a_m - a_n| \leq \underbrace{|a_m - a|}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{|a - a_n|}_{< \varepsilon/2} < \varepsilon$$

$(2) \Rightarrow (1)$ ... několik kroků:

1. $\{a_n\}$ omezené ... užiji (B.C.) pro $\varepsilon = 1$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0$

$$|a_n - a_m| < 1,$$

speciálně: $|a_n - a_{n_0}| < 1$, $\forall n \geq n_0$

neboli: $\underbrace{a_{n_0}-1}_{L} < a_n < \underbrace{a_{n_0}+1}_{K}$, $\forall n \geq n_0$

2. $\exists$ hromadný bod $a \in \mathbb{R}$

($\Leftarrow$ Věta 7.4)

3. $a_n \to a$ ... $\varepsilon > 0$ dáno:

užiji B.C. pro $\varepsilon/2 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$

t.ž. $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$, $\forall m, n \geq n_0$

navíc: $a_m \in \mathcal{U}(a, \varepsilon/2)$ pro nekonečně mnoho m (dle 2.);

speciálně: $\exists m \geq n_0$ t.ž.

$a_{\tilde{m}} \in \mathcal{U}(a, \varepsilon/2)$, neboli:

$|a_{\tilde{m}} - a| < \varepsilon/2$ ... (fixuji toto m)

CELKEM: $\forall n \geq n_0$:

$$|a_n - a| \leq \underbrace{|a_n - a_m|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{|a_m - a|}_{<\varepsilon/2} < \varepsilon$$

Věta 7.6. (Heineho pro limitu.)

Následující je ekvivalentní:

(1) $f(x) \to A$ pro $x \to x_0$

(2) pro každou posl. $\{x_n\}$, splňující:

(i) $x_n \to x_0$ (ii) $x_n \neq x_0$, $\forall n$

platí, že $f(x_n) \to A$.

Dk. (1) $\Rightarrow$ (2): nechť $\{x_n\}$ splní (i), (ii)

cíl: $f(x_n) \to A$, neboli:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow f(x_n) \in U(A, \varepsilon)$$

buď $\varepsilon > 0$ dáno ... dle (1) $\exists \delta > 0$ t. ž.

$$(*) \qquad x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(A, \varepsilon)$$

dle (i): $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t. ž. $\forall n \geq n_0$

$$x_n \in U(x_0, \delta)$$

avšak dle (ii) dokonce:

$$x_n \in P(x_0, \delta)$$

(neboť $x_n \neq x_0$; $P = U \setminus \{x_0\}$)

konečně, pomocí (*): $f(x_n) \in \mathcal{U}(A, \varepsilon)$

pro $\forall n \geq n_0$.

-----

(2) $\Rightarrow$ (1) ... nepřímo, tj. $\neg(1) \Rightarrow \neg(2)$

nechť $\neg(1)$, tj. $f(x) \not\to A$, $x \to x_0$

$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 : \exists x \in P(x_0, \delta)$ t.ž.

$f(x) \notin \mathcal{U}(A, \varepsilon)$.

fixuji toto $\varepsilon > 0$, a užívám zbytek formule pro $\delta = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$

$\Rightarrow \exists x_n \in P(x_0, \frac{1}{n})$ t.ž. $f(x_n) \notin \mathcal{U}(A, \varepsilon)$

zřejmě: $x_n \to x_0$, ale $x_n \neq x_0 \ \forall n$,

tj. $\{x_n\}$ splní (i), (ii)

avšak: $f(x_n) \not\to A$

... tedy (2) neplatí.

Věta 7.7. (Heine: spojitost v intervalu.)

Následující je ekvivalentní:

(1) $f(x)$ je spojitá v I

(2) pro $\forall$ posl. $\{x_n\}$ a bod x_0,

splňující (i) $x_n \to x_0$

(ii) $x_0 \in I$, $x_n \in I$ pro $\forall n$

platí, že $f(x_n) \to f(x_0)$.

Dk. (1) $\Rightarrow$ (2) : víme, pro každé $x_0 \in I$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \underbrace{x \in \mathcal{U}(x_0, \delta) \cap I \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon)}_{(*)}$$

nechť $\{x_n\}$ splňuje (i), (ii)

... cíl: $f(x_n) \to f(x_0)$.

$\varepsilon > 0$ dáno : $\exists \delta > 0$ t.ž. platí $(*)$

dle (i) ... $\exists n_0$ t.ž. $\forall n \geq n_0$: $x_n \in \mathcal{U}(x_0, \delta)$

díky (ii) navíc $x_n \in I$, a tedy

(dle $(*)$) : $f(x_n) \in \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon)$, $n \geq n_0$.

(2) $\Rightarrow$ (1) ... negujme, tj. $\neg(1) \Rightarrow \neg(2)$

nechť neplatí (1), tj. $\exists x_0 \in I$ t.ž.

$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 : \exists x \in U(x_0, \delta) \cap I$ t.ž.

$$f(x) \notin U(f(x_0), \varepsilon)$$

tato $x_0 \in I$, $\varepsilon > 0$ fixuji, složek formule užívám pro $\delta = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$

$\Rightarrow \exists x_n \in U(x_0, \frac{1}{n}) \cap I$ t.ž.

$$f(x_n) \notin U(f(x_0), \varepsilon).$$

zřejmě: posl. $\{x_n\}$ splní (i), (ii)

leč: $f(x_n) \not\to f(x_0)$, tj. $\neg(2)$.

Příkl. 1 $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \longrightarrow e$

dk. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = f(x_n)$, kde $x_n = \frac{1}{n}$,

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)$$

víme: $f(x) \to e^1$, $x \to 0$

(skládání limity + VoLSF)

nyní: $x_n \to 0$, leč $x_n \neq 0$ pro $\forall n$

Heine (Věta 7.6) $\Rightarrow f(x_n) \to e^1$.

---

(2) $\nexists \lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$

Dk. ?? $\sin x \to A$, $x \to +\infty$

Lvol: $x_n = n\pi$ ... $x_n \to +\infty$, leč $x_n \neq +\infty$

Věta 7.6: $\left.\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0\ \forall n} \to A \right\} \Rightarrow \boxed{A=0}$

Lvol: $x_n = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$

opět dle Heineho:

$\left.\underbrace{\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}_{1\ \forall n} \to A \right\} \Rightarrow \boxed{A=1}$

SPOR

③ $x_1 = 0, \quad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, \quad n \geq 1.$

Ověříme: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 2$

1. Nechť $x_n \to a \in \mathbb{R}$ (zatím nevíme!)

$\underbrace{x_{n+1}}_{\downarrow \atop a} = \underbrace{\sqrt{2+x_n}}_{\downarrow \atop \sqrt{2+a}} \Rightarrow$ $a = \sqrt{2+a}$

$a^2 = 2 + a$

$(a-2)(a+1) = 0$

tj. musí $\boxed{a = 2 \text{ nebo } -1.}$

2. $0 \leq x_n \leq 2$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$

(snadno indukcí)

3. $\{x_n\}$ neklesající: $x_n \leq x_{n+1}$

$x_n \leq \sqrt{2 + x_n}$

$x_n^2 \leq 2 + x_n$

$(x_n - 2)(x_n + 1) \leq 0$

... platí dle 2.

CELKEM: $\{x_n\}$ omezená, monotónní (bod 2, 3)

Věta 7.2 $\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}$ t.ž. $x_n \to a$

bod 1. $\Rightarrow a = 2$ (-1 nelze, bod 2.)