Věta 7.1 $\{a_n\}$ konv. $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ je omezená.

Dk: nechť $a_n \to a \in \mathbb{R}$ ... vol $\varepsilon = 1$

$\Rightarrow \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < 1$

$$\underbrace{a-1}_{= L} < a_n < \underbrace{a+1}_{= K}$$

$\Rightarrow n \geq n_0 : |a_n| \leq \tilde{C}$, kde $\tilde{C} = \max\{|L|, |K|\}$

polož $C = \max\{|a_1|, \dots |a_{n_0}|, \tilde{C}\}$

$\Rightarrow |a_n| \leq C, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Věta 7.2. $\{a_n\}$ monot. $\Rightarrow \exists a = \lim_{n\to\infty} a_n$

Navíc: $\{a_n\}$ omez. $\Rightarrow a \in \mathbb{R}$, tedy $\{a_n\}$ konverguje.

Dk. BÚNO: $\{a_n\}$ neklesající: $a_n \leq a_{n+1}\ \forall n$

polož $M = \{a_n ; n \in \mathbb{N}\}$

1. M omezené ($\Leftrightarrow \{a_n\}$ omezené):

ukážeme, že $a_n \to S$, kde $S = \sup M \in \mathbb{R}$

$S = \sup M \iff$ (i) $a_n \leq S$, $\forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $\forall S' < S \; \exists n : a_n > S'$

$\varepsilon > 0$ dáno: $S - \varepsilon < S$, tedy dle (ii)

$\exists n_0$ t.ž. $a_{n_0} > S - \varepsilon$

$\{a_n\}$ neklesá $\Rightarrow a_n > S - \varepsilon \; \forall n \geq n_0$

dále, dle (i): $a_n \leq S$, pro $\forall n \in \mathbb{N}$

CELKEM: $n \geq n_0 \Rightarrow S - \varepsilon < a_n \leq S$

$\Rightarrow \boxed{a_n \in U(S, \varepsilon)}.$

------

2. M neomezená $\Rightarrow \{a_n\}$ neomezená; a to nutně shora ($a_1 \leq a_n \; \forall n$)

ukážeme: $a_n \to +\infty$.

$\varepsilon > 0$ dáno: $\exists n_0$ t.ž. $a_{n_0} > \frac{1}{\varepsilon}$

($\Leftarrow$ neomezenost M shora)

a tedy: $\forall n \geq n_0$: $a_n > \frac{1}{\varepsilon}$, neboli

$a_n \in U(+\infty, \varepsilon)$.

Pozn. ① $a_n=(-1)^n$ má hr. body $+1, -1$.

dk: $a_n = 1 \in U(1,\varepsilon)$, $\forall n$ sudé
-1 liché

② $a_n=\sin n$ .... hromadné body: $[-1,1]$
(těžké...)

③ $a_n \to a \Rightarrow a$ je jediný hr. bod.

dk: $\varepsilon>0$ dáno: $a_n \in U(a,\varepsilon)$ $\underbrace{\forall n \geq n_0}_{\infty\text{-mnoho}}$

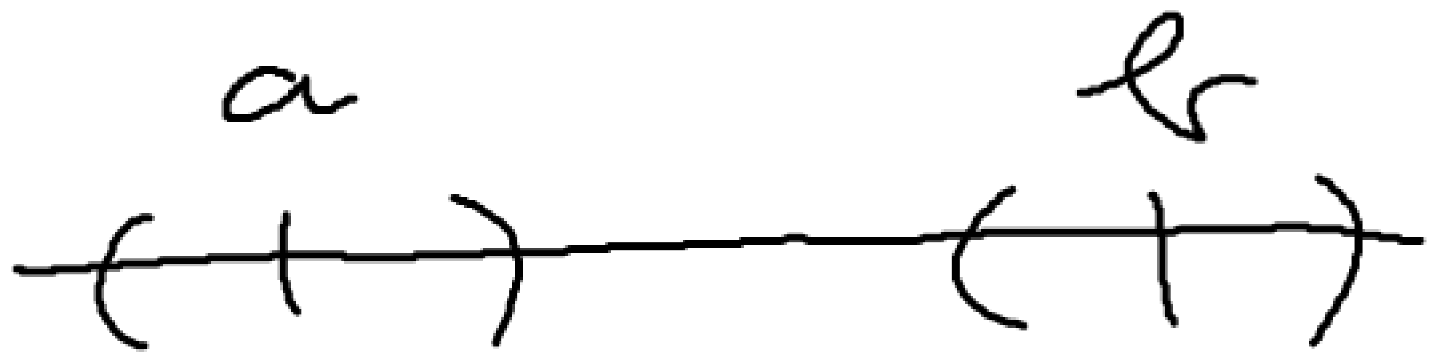
$\Rightarrow a$ je hr. bod.

jediný?? nechť $b \neq a$ je též hr. bod

vol $\varepsilon > 0$ t. ž. $U(a,\varepsilon) \cap U(b,\varepsilon) = \emptyset$
(Lemma 2.1)

$a_n \to a$, tedy $a_n \in U(a,\varepsilon)$ $\forall n \geq n_0$

zároveň $b_n \in U(b,\varepsilon)$ pro
nekonečně $n \in \mathbb{N}$,
tedy pro jistá $n \geq n_0$



... SPOR

<u>Věta 7.3</u> $a \in \mathbb{R}^*$ je hr. bod $\{a_n\}$ $\Leftrightarrow$

$\exists \{b_n\}$ podposl. $\{a_n\}$ t.ž. $b_n \to a$.

- - - - -

Dk. <u>1</u>. „$\Rightarrow$": buď a hr. bod $\{a_n\}$

cíl: najít $k_1 < k_2 < \cdots$ t.ž. $a_{k_n} \to a$,

$(n \to \infty)$.

$a_k \in \mathcal{U}(a, 1)$ pro nekonečně k

$\Rightarrow \exists k_1$ t.ž. $a_{k_1} \in \mathcal{U}(a, 1)$

$a_k \in \mathcal{U}(a, \frac{1}{2})$ pro nekonečně k

$\Rightarrow \exists k_2$ t.ž. $a_{k_2} \in \mathcal{U}(a, \frac{1}{2})$,

navíc $k_2 > k_1$

obecně: $k_1, \dots, k_{n-1}$ máme:

$a_k \in \mathcal{U}(a, \frac{1}{n})$ pro nekonečně k

$\Rightarrow \exists k_n > \max\{k_1, \dots k_{n-1}\}$

t.ž. $a_{k_n} \in \mathcal{U}(a, \frac{1}{n})$

vidím, že $k_1 < k_2 < \dots k_n$, tedy

$\{b_n\} = \{a_{k_n}\}$ je podposloupnost $\{a_n\}$

$b_n \to a$? $\varepsilon > 0$ dáno: $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$

t.ž. $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ $\left(\Leftarrow n_0 > \frac{1}{\varepsilon} \right.$ Věta A.3 $\left. \right)$

$\forall n \geq n_0$: $b_n = a_{k_n} \in U(a, \frac{1}{n})$

leč: $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, a tedy

$b_n \in U(a, \varepsilon)$.

...

2. „$\Leftarrow$": nechť $b_n = a_{k_n} \to a$

? a hr. bod $\{a_n\}$

$\varepsilon > 0$ dáno: $\exists n_0$ t.ž. $\forall n \geq n_0$

$b_n = a_{k_n} \in U(a, \varepsilon)$

$\Rightarrow$ $a_k \in U(a, \varepsilon)$ pro každé

$k \in \{k_{n_0}, k_{n_0+1}, k_{n_0+2}, \dots\}$

... nekonečné množině ...

Věta 7.4 (Bolzano–Weierstrass) nechť $\{a_n\}$ je omezená. Pak $\{a_n\}$ má hr. bod v $\mathbb{R}$.

Dk. nechť $L \le a_n \le K$, pro $\forall n$

$$M = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; x \le a_n \text{ pro nekonečně } n\}$$

vidíme: • $M \neq \emptyset$ (neboť $L \le a_n$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$, a tedy $L \in M$)

• M shora omezené (číslem K, neboť $K < x$ $\Rightarrow a_n < x$ pro $\forall n$, a tedy $x \notin M$)

Věta A.4 $\Rightarrow$ $\exists a \in \mathbb{R} : a = \sup M$

tj. platí (i) $\forall x \in M : x \le a$

(ii) $\forall a' < a \; \exists x \in M : x > a'$.

tvrdím: a je hr. bod $\{a_n\}$

$\varepsilon > 0$ dáno: $a + \varepsilon \notin M$ ... dle (i),

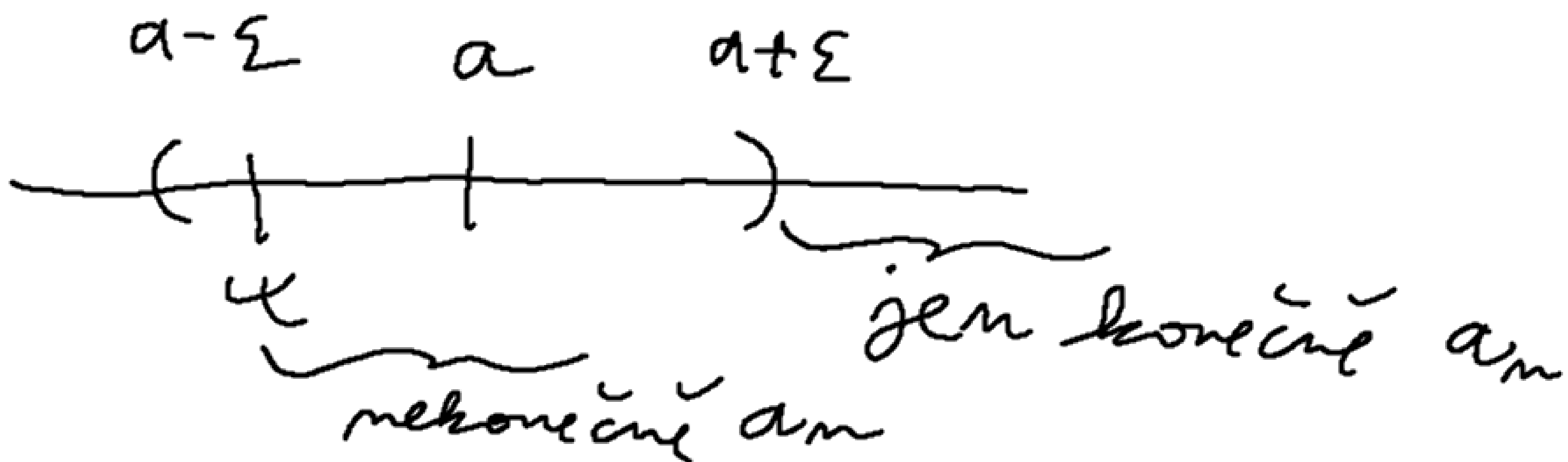
$\Rightarrow a_n < a + \varepsilon$ až na konečně n

$a - \varepsilon < a$ ... dle (ii) $\exists x \in M$, $x > a + \varepsilon$

tj. $a_n \ge x$ pro nekonečně n

CELKEM: $a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$ $\left(\iff a_n \in U(a,\varepsilon)\right)$

pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$



<u>Důsl.</u> Nechť $\{x_n\}$ splňuje $x_n \in [a,b]$, pro $\forall n$. Pak $\exists$ podposl. $\{\tilde{x}_n\}$ a bod $x_0 \in [a,b)$ t.ž. $\tilde{x}_n \to x_0$.

<u>Dk.</u> zřejmě $\{x_n\}$ je omezená

Věta 7.4 $\Rightarrow$ $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ hrom. bod

Věta 7.3 $\Rightarrow$ $\exists$ podposl. $\{\tilde{x}_n\}$ t.ž.

$\tilde{x}_n \to x_0$

zbývá: $x_0 \in [a,b]$

jasné, neboť: $a \leq \tilde{x}_n \leq b$ $\forall n$

a užiji Větu 2.9 (zachování $\leq$ resp. $\geq$ v limitě)

Důkaz věty 6.1.

?? $f(x)$ není omezená v $[a,b]$, tj.

$\forall K>0\ \exists x\in[a,b]$ t.ž. $f(x)>K$

vol $K=1 \Rightarrow \exists x_1$ t.ž. $f(x_1)>1$

$\vdots$ $K=2$ $\exists x_2$ $f(x_2)>2$

obecně: $K=n$ $\exists x_n\in[a,b]$: $f(x_n)>n$

vidíme: $f(x_n)\to+\infty$ (věta 2.10)

ALE: dle předchozího Důsledku:

$\exists$ podposl. $\{\tilde{x}_n\}$ t.ž. $\tilde{x}_n\to x_0\in[a,b]$

dle Heineho věty: $f(\tilde{x}_n)\to f(x_0)$
(viz níže)

avšak $f(\tilde{x}_n)\to+\infty$, což je SPOR

Pozn. užili jsme faktu, že pokud

$a_n\to a$, pak také $\tilde{a}_n\to a$,

pro každou podposloupnost