Opakuj: $f(x)$ omezené na $I$ $\Leftrightarrow$ omezené zdola shora i zdola, tj:

$$\exists K, L \in \mathbb{R}\ \forall x \in I: L \leq f(x) \leq K$$

$$\Leftrightarrow \exists C > 0\ \forall x \in I: \quad |f(x)| \leq C$$

$$(-C \leq f(x) \leq C)$$

L 2.1: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ omezené na jistém $P(x_0, \delta)$

Lemma 6.1 $f(x)$ spojité v bodě $x_0$ $\Rightarrow f(x)$ omezené na jistém $\mathcal{U}(x_0, \delta)$.

Dk. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: x \in \mathcal{U}(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon)$

vol $\varepsilon = 1$ .. $\exists \delta > 0$ t. ž. $\forall x \in \mathcal{U}(x_0, \delta)$

$$f(x) \in \mathcal{U}(f(x_0), 1)$$

tj: $\underbrace{f(x_0) - 1}_{L} < f(x) < \underbrace{f(x_0) + 1}_{K}$

Pozn.: platí jednostranné verze Lemmat 2.1, 6.1.

<u>Věta 6.1</u> $f(x)$ spojité v omezeném, uzavřeném $I \Rightarrow f(x)$ omezené v $I$.

<u>Dk.</u> „plíživý důkaz": nechť $I = [a, b]$.

polož $M = \{ y \in I;\ f(x) \text{ omezené na } [a, y] \}$

$$x_1 = \sup M$$

vidíme: $f(x)$ omezené na $[a, a+\delta_1)$

($\Leftarrow$ L. 6.1, $x_0 = a$, pravostranné verze)

speciálně $a + \frac{1}{2}\delta_1 \in M$

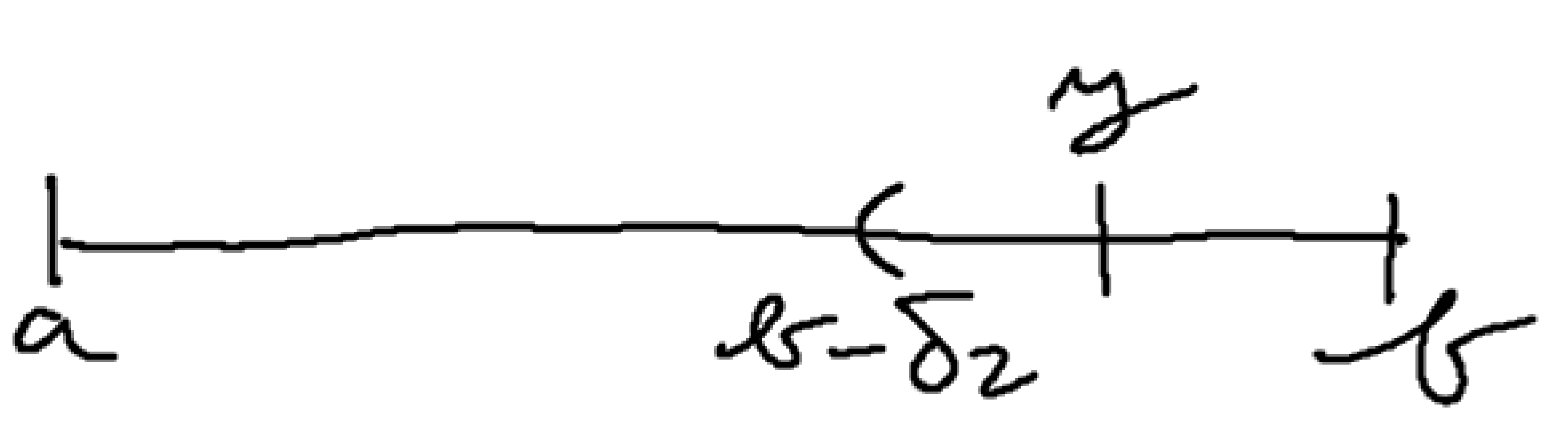
$\Rightarrow \quad x_1 \in [a + \frac{1}{2}\delta_1, b]$.

stačí ukázat: $x_1 = b$, neboť:

- $f(x)$ omezené na $(b - \delta_2, b]$
  ($\Leftarrow$ L. 6.1, $x_0 = b$, levostranné verze)
- $b - \delta_2 < x_1 = \sup M$, tedy dle

vlastnosti (ii) suprema: $\exists\, y \in M : \underline{y > b - \delta_2}$

$\Rightarrow f(x)$ omezené na $[a, y] \cup (b - \delta_2, b] = I$



dokažme, že $x_1 = \sup M = b$

?? $x_1 < b$, tedy $x_1 \in (a, b)$

L.6.1 $\Rightarrow$ $f(x)$ omezená na $U(x_1, \delta) \subset I$

tj. na $(x_1 - \delta, x_1 + \delta)$

leč, podobně jako výše:

$x_1 - \delta < x_1 \Rightarrow \exists y \in M$ t.ž. $y > x_1 - \delta$

$\Rightarrow f(x)$ omezená na $[a, y] \cup (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$

$\Rightarrow f(x)$ omezená na $[a, x_1 + \frac{\delta}{2}]$

tj. $x_1 + \frac{\delta}{2} \in M$ ... SPOR s vlastností (i),

$x_1$ je horní odhad $M$.

Pozn.: předpoklady nelze oslabit:

- $f(x) = x$, $I = [0, +\infty)$
- $f(x) = 1/x$, $I = (0, 1]$
- $I = [-1, 1]$; $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Věta 6.2 Nechť $f(x)$ je spojité na omezeném, uzavřeném $I$. Pak zde nabývá maxima i minima.

Dk. polož $M = f(I) = \{f(x); x \in I\}$

$$S = \sup M$$

V. 6.1 $\Rightarrow$ $M$ shora omezená, tedy $S \in \mathbb{R}$

a platí: $f(x) \le S, \ \forall x \in I$

(supremum je horní odhad)

tvrdím: $\exists x_0 \in M$ t.ž. $f(x_0) = S$

($\Rightarrow$ jsem hotov: toto $x_0$ je bod maxima)

$\boxed{??}$ nechť $f(x) < S$ pro $\forall x \in I$

pomocná fce $\boxed{\varphi(x) := \dfrac{1}{S - f(x)}}$

... spojité v $I$, neboť $S - f(x) \neq 0$

buď $K > 0$ libovolné: $S - \frac{1}{K} < S = \sup M$

vlastnost (ii) $\Rightarrow$ $\exists x \in I$ t.ž. $f(x) > S - \frac{1}{K}$

$\Leftrightarrow$ $\varphi(x) > K$, tedy $\varphi(x)$ je shora neomezená (SPOR s Větou 6.1)

Věta 6.3. Nechť $x_0 \in I$ je vnitřní, $f'(x_0) \neq 0$.
Pak $x_0$ není (lokální) extrém $f(x)$ vůči $I$.

Dk. $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \neq 0.$$

BÚNO: $\underbrace{< 0}$ ... $\exists \delta > 0$ t. ž. $x \in P(x_0, \delta)$

(viz L.2.1) $\Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0$

Nechť navíc $P(x_0,\delta) \subset I$ ($x_0$ vnitřní)

1. $x \in P_+(x_0,\delta) \Rightarrow x - x_0 > 0$, tedy
$f(x) - f(x_0) < 0$
neboli $f(x) < f(x_0)$

2. $x \in P_-(x_0,\delta) \Rightarrow x - x_0 < 0$, tedy
$f(x) - f(x_0) > 0$,
tj. $f(x) > f(x_0)$

$\Rightarrow$ $x_0$ není lokální minimum
ani maximum.

Věta 6.4 (Rolle.) Nechť $f(x)$ je spojité v $I=[a,b]$, nechť $f(a)=f(b)$, a nechť $\exists f'(x)$ pro $\forall x \in (a,b)$. Pak $\exists c \in (a,b)$ t.ž. $f'(c)=0$.

Dk. označ $K=f(a)=f(b)$

1. nechť: $f(x)=K$, $\forall x \in (a,b)$.

pak ale $f'(x)=0$, $\forall x \in (a,b)$

$\Rightarrow$ závěr platí ($c$ libovolné)

2. nechť: $\exists \tilde{x} \in (a,b)$ t.ž. $f(\tilde{x}) \neq K$.

BÚNO: $f(\tilde{x})>K$

nechť $c \in [a,b]$ je globální maximum

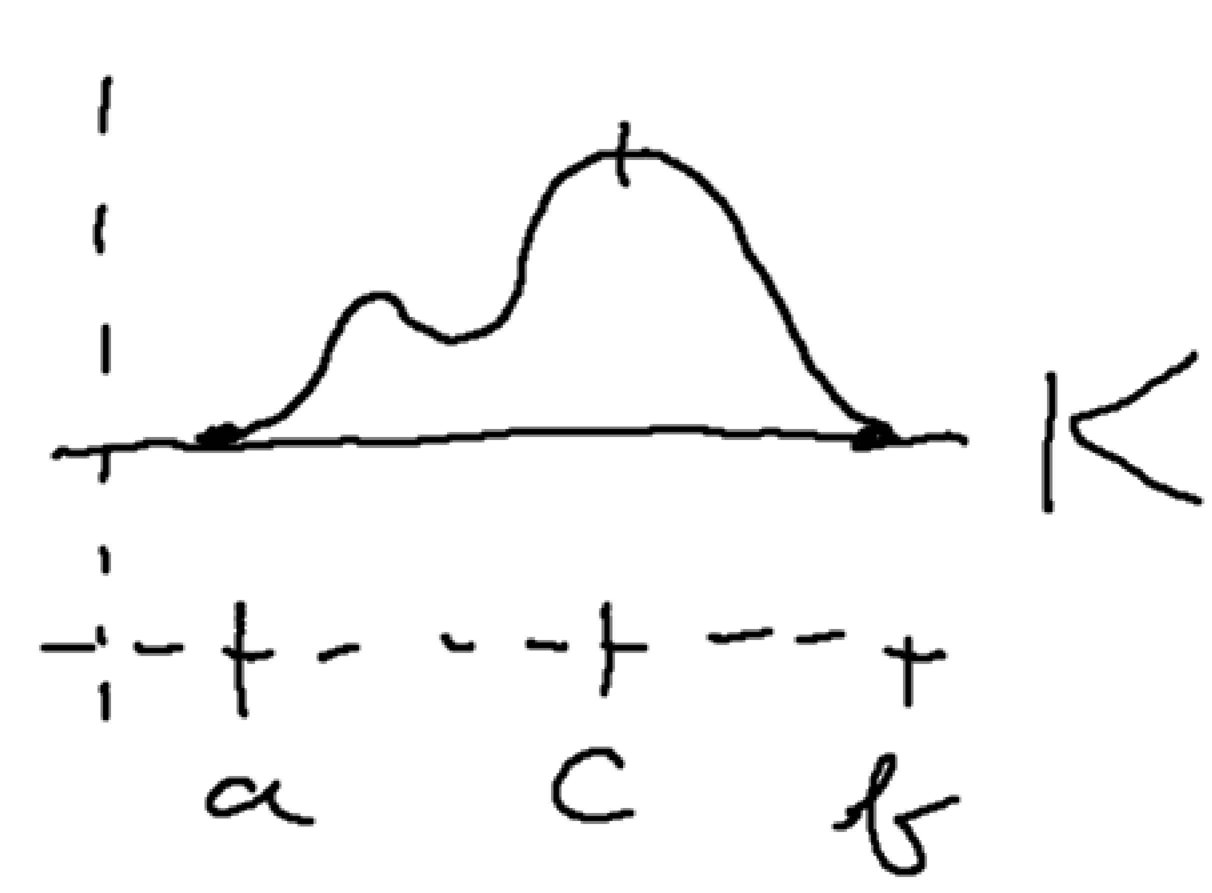
($\exists$ dle Věty 6.2)

nutně $f(c) \geq f(\tilde{x}) > K$, tedy

$c \in (a,b)$

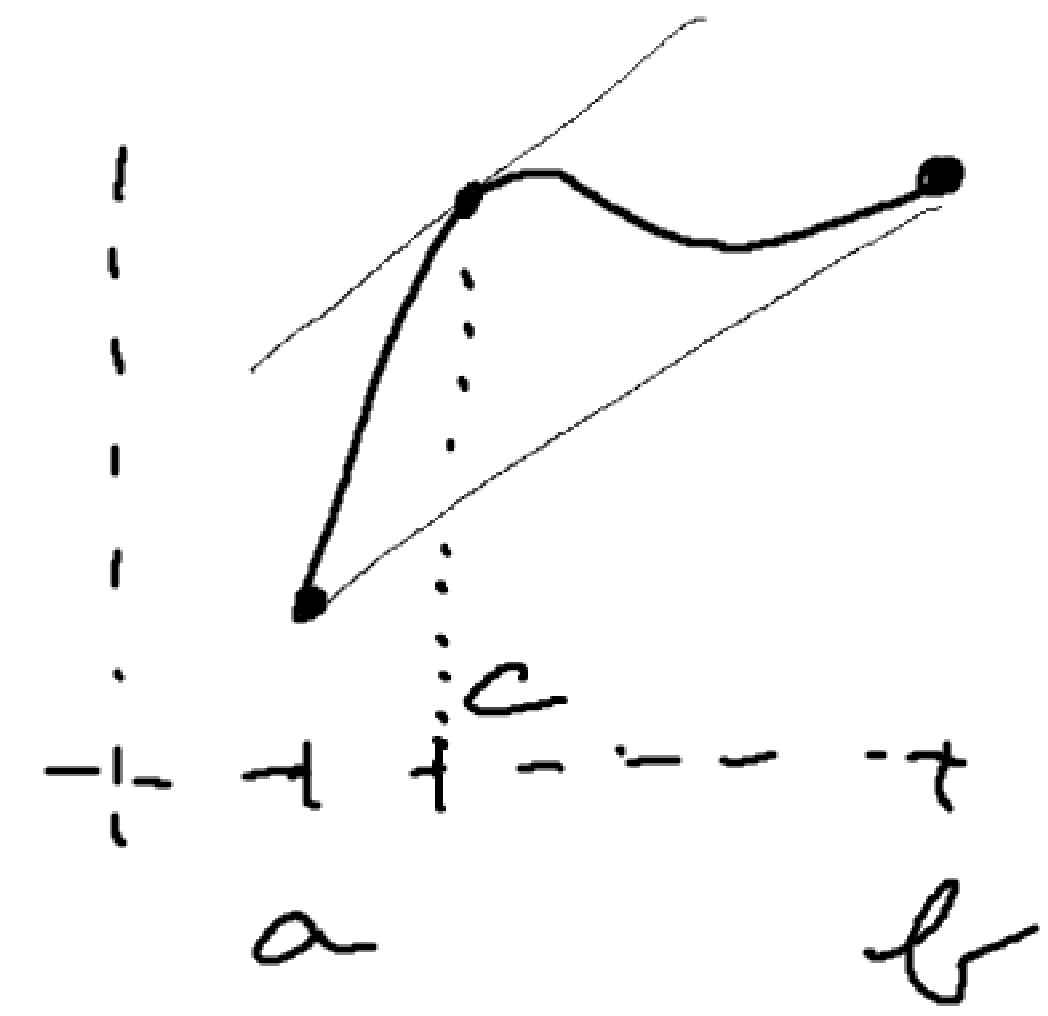
víme tedy, že $\exists f'(c)$

... Věta 6.3 $\Rightarrow$ $f'(c)=0$.



__Věta 6.5__ [Lagrange]. Nechť $f(x)$ je spojitá v $I=[a,b]$, nechť $\exists f'(x)$ pro $\forall x \in (a,b)$. Pak $\exists c \in (a,b)$ t.ž.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$




---

__Dk.__ pomocná funkce

$$\varphi(x) := f(x) - L\cdot(x-a), \quad x \in [a,b]$$

$$\text{kde } L = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

zřejmě: $\varphi(x)$ je spojitá v $[a,b]$

$\varphi(a) = f(a)$, $\varphi(b) = f(a)$,

tj. $\varphi(a) = \varphi(b)$

$\varphi'(x) = f'(x) - L$, $x \in (a,b)$

Věta 6.4 $\Rightarrow \exists c \in (a,b)$ t.ž. $\varphi'(c) = 0$,

neboli $f'(c) = L$, q.e.d.

**Příkl.** $\sin x < x$, $\forall x > 0$.

1. $x \geq \frac{\pi}{2}$ ... jasné, neboť $\frac{\pi}{2} > 1$, $\sin x \leq 1$

2. $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ ... ukážu $\psi(x) > 0$, kde

$$\psi(x) = x - \sin x.$$

ainsi: $\psi(x) = \psi(x) - \psi(0) = \psi'(c) \cdot (x - 0)$

(dle V. 6.5 na $I = [0, x]$).

kde $c \in (0, x) \subset (0, \frac{\pi}{2}]$, a tedy

$$\psi'(c) = 1 - \cos c > 0.$$

**Věta 6.6.** Nechť $f(x)$ je spojité v $U(x_0, \delta)$, nechť $\exists f'(x)$ pro $\forall x \in P(x_0, \delta)$. Nechť $f'(x) \to L$, pro $x \to x_0$, kde $L \in \mathbb{R}^*$. Pak $f'(x_0) = L$.

----

**Dk.** pravostranné verze:

víme: $f(x)$ spojitá v $[x_0, x_0 + \delta)$

$f'(x) \to L$, $x \to x_0$. cíl: $f'_+(x_0) = L$

neboli: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ s.ž. $\forall x \in P_+(x_0, \delta)$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathcal{U}(L, \varepsilon)$$

$\varepsilon > 0$ dáno: $\exists \delta > 0$ s.ž. $\forall c \in P_+(x_0, \delta)$

$$f'(c) \in \mathcal{U}(L, \varepsilon)$$

....

$\Rightarrow$ jsem hotov: když $x \in P_+(x_0, \delta)$

... dle Věty 6.5 na $I = [x_0, x]$

$\exists c \in (x_0, x)$ s.ž. $\boxed{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(c)}$

leč $(x_0, x) \subset P_+(x_0, \delta)$, tedy $c \in P_+(x_0, \delta)$

$\Rightarrow$ PS $\in \mathcal{U}(L, \varepsilon)$, a tak i LS.