Příkl. (1) $\arcsin'_{\mp}(\pm 1) = \lim\limits_{x\to\pm 1\mp} (\arcsin x)'$

$= \lim\limits_{x\to\pm1\mp} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$, dle Věty 2.8.

(2) $f(x) = \sqrt[3]{x^2-1}$; spojité v $\mathbb{R}$

$f'(x) = \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$, $x \neq \pm 1$

$f'(\pm 1) = \lim\limits_{x\to\pm1} f'(x) = \lim\limits_{x\to\pm1} \dfrac{2x}{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} = \pm\infty$

dle VoAL, neboť $\dfrac{2x}{3} \to \pm\dfrac{2}{3}$

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} \to +\infty$ (Věta 2.8)

Lemma 6.2 (O lepení z. f.)

Nechť $F'(x) = f(x)$ pro $\forall x \in (a,b)$, $x \neq x_0$.
Nechť $F(x), f(x)$ jsou spojité v bodě x_0.
Pak platí $F'(x_0) = f(x_0)$, a tedy celkem

$\int f(x)\,dx = F(x)$ v (a,b).

Dk. $\lim\limits_{x\to x_0} F'(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$F' = f$ na jistém $P(x_0,\delta)$

spojitost f v bodě x_0, Věta 2.5

$\Longrightarrow F'(x_0) = f(x_0)$, dle Věty 6.6.

Věta 6.7 Nechť I je otevřený interval. Nechť $f(x)$ je spojité v I, nechť $\exists f'(x) \in \mathbb{R}$ pro $\forall x \in I$. Pak $f'(x)$ má v I Darbouxovu vlastnost.

Dk. Nechť $f'(a) < \gamma < f'(b)$, $a < b \in I$.

cíl: $\exists c \in (a,b)$ t.ž. $f'(c) = \gamma$.

1. $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} > \gamma$

$\Rightarrow \exists \delta_1 > 0$ t.ž. $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} > \gamma$,

pro $\forall h \in P(0,\delta_1)$.

2. $f'(b) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(b+h)-f(b)}{h} < \gamma$

$\Rightarrow \exists\, \delta_2 > 0$ t.ž. $\dfrac{f(b+h)-f(b)}{h} < \mu$

pro $\forall\, h \in P(0, \delta_2)$

<u>3.</u> buď $h > 0$ t.ž. $h < \min\{\delta_1, \delta_2\}$,

navíc $h < b-a$ $\left(\Leftrightarrow \begin{array}{l} a+h < b \\ b-h > a \end{array}\right)$

pomocná funkce $\varphi(x) = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

vidíme: $\varphi(x)$ spojitá v $[a, b-h]$

dle <u>1.</u>: $\varphi(a) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} < \mu$

dle <u>2.</u>: $\varphi(b-h) = \dfrac{f(b)-f(b-h)}{h}$

$= \dfrac{f(b-h)-f(b)}{-h} > \mu$

Věta 2.16 $\Rightarrow \exists\, x_0 \in (a, b-h)$

t.ž. $\varphi(x_0) = \mu$.

tedy: $\varkappa = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

dle Věty 6.5 (Lagrange), $I=[x_0, x_0+h]$

$\exists c \in (x_0, x_0+h)$ t.ž. $f'(c) = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

tj. $f'(c) = \varkappa$.

<u>Věta 6.8</u> (Cauchy) nechť $f(x), g(x)$ jsou spojité v $[a,b]$, nechť $\exists f'(x)$, $g'(x)$ vlastní, navíc $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$.
Pak $\exists c \in (a,b)$ tak, že

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

<u>Dk.</u> $g(x)$ ryze monotónní, BÚNO roste
(důkaz později)

polož $J = g([a,b]) = [\alpha, \beta]$,

kde $\alpha = g(a)$, $\beta = g(b)$.

pomocné fce $\varphi(t) = f(g_{-1}(t))$, pro $t \in [\alpha, \beta]$.

vidím: • $\varphi(t)$ spojité ($\Leftarrow$ Věta 2.15, Věta 2.17)

• $\varphi'(t) = f'(g_{-1}(t))\,(g_{-1})'(t)$

$= f'(g_{-1}(t)) \cdot \dfrac{1}{g'(g_{-1}(t))}$ (Věty 4.3 a 4.4)

Věta 6.5 $\Longrightarrow$ $\exists\, \gamma \in (\alpha, \beta)$ t. ž.

$$\boxed{\frac{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)}{\beta - \alpha} = \varphi'(\gamma)}$$

jsem hotov: PS $= \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$, kde $c := g_{-1}(\gamma)$

LS: $\varphi(\beta) = f(b)$, $\varphi(\alpha) = f(a)$

$\beta = g(b)$, $\alpha = g(a)$

Důsl. (Věty 6.5)

① $F(x)$ spojité v I, $F'(x)=0$, $\forall x\in I$ vnitřní

$\Rightarrow F(x)$ konstantní v I

dk. polož $K=F(x_0)$, kde $x_0\in I$ libovolné

ověřím: $F(x)=K$, $\forall x\in I$:

buď $x\in I$ libovolné, BÚNO $x\neq x_0$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{dle Věty 6.5}\\ \text{na } [x_0, x]\end{array}\right\} F(x)-F(x_0)=F'(c)\cdot(x-x_0)$$

nebo $[x, x_0]$

pro c mezi $x, x_0\in I$,

tj. $c\in I$ je vnitřní

$\Rightarrow F'(c)=0$, a tedy $F(x)-F(x_0)=0$.

---

② $F_1(x), F_2(x)$ primitivní funkce

k $f(x)$ v otevřeném intervalu I

$\Rightarrow \exists K$ t.ž. $F_2(x)=F_1(x)+K$, $\forall x\in I$.

dk. užiji ① na $F(x)=F_2(x)-F_1(x)$

$\dots$ $F'(x)=F_2'(x)-F_1'(x)=f(x)-f(x)=0$

$F(x)$ spojité $(\Leftarrow \exists F'(x)\in\mathbb{R})$

Věta 6.9 (l'Hospital.) Nechť $\exists$ vlastní $f'(x), g'(x)$, navíc $g'(x) \neq 0$ na jistém $P(x_0)$. Nechť platí buď (a) $f(x), g(x) \to 0$, $x \to x_0$

nebo (b) $|g(x)| \to +\infty$, $x \to x_0$.

Nechť: $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \to L$. Pak $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to L$, $x \to x_0$.

Dk. ... postupně pro různé případy:

1. $x \to x_0+$, kde $x_0 \in \mathbb{R}$, varianta (a),

tj. $f(x), g(x) \to 0$, $x \to x_0+$.

$\varepsilon > 0$ dáno: $\exists \delta > 0$ t.ž. $\forall c \in P(x_0, \delta)$

$$\text{platí } \frac{f'(c)}{g'(c)} \in U(L, \varepsilon)$$

TRIK: dodefinuj $f(x_0) = g(x_0) = 0$

(nemá vliv na limitu v x_0)

$\Rightarrow f(x), g(x)$ spojité v $[x_0, x_0+\delta)$, neboť:

- v bodě x_0 zprava $\Leftarrow$ Věta 2.12, máme totiž $f(x) \to 0 = f(0)$, $x \to x_0$ (stejně pro $g(x)$)

• v bodech $(x_0, x_0+\delta)$ $\Leftarrow$ Věta 4.1, neboť

$\exists$ vlastní $f'(x), g'(x)$

---

buď $x \in P(x_0,\delta)$ libovolné:

aplikuji Větu 6.8 na $[x_0, x]$
(Cauchy)

$$\Rightarrow \exists c \in (x_0, x) : \boxed{\frac{f(x_0)-f(x)}{g(x_0)-g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}}$$

jsem hotov: $c \in (x_0, x) \subset (x_0, x_0+\delta) = P(x_0,\delta)$

$\Rightarrow PS \in \mathcal{U}(L,\varepsilon)$, a tedy

$$LS = \frac{0-f(x)}{0-g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathcal{U}(L,\varepsilon).$$

---

2. $x \to \underbrace{+\infty}_{=\,x_0}$, varianta (a), tj.

$f(x), g(x) \to 0,\ x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0+} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)} =$$

Lemma 2.3

bod 1.
$(x_0 = 0)$

$$= \lim_{y\to 0+} \frac{\left(f\left(\frac{1}{y}\right)\right)'}{\left(g\left(\frac{1}{y}\right)\right)'} = \lim_{y\to 0+} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\left(\frac{-1}{y^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)}$$

$$= \lim_{y\to 0+} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)} \overset{L.2.1}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

<u>3.</u> $x \to x_0+$, varianta (b), tj. $|g(x)| \to +\infty$

řešení: buď $x_0 < x < y$: dle V.6.8

$\exists\, c \in (x,y)$ t.ž. $\boxed{\dfrac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}}$

$$f(x)-f(y) = \frac{f'(c)}{g'(c)}\cdot\left(g(x)-g(y)\right) \quad \Big|\ \frac{1}{g(x)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \underbrace{\frac{f(y)}{g(x)}}_{P_1} + \frac{f'(c)}{g'(c)}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)}_{P_2}$$

závěr: fixuji y „blízko" x_0

$\Rightarrow c \in (x, y)$ je blízko x_0, a tedy

$\frac{f'(c)}{g'(c)}$ je blízko L

pro x blízko x_0 je $|g(x)|$ velké

(neboť $|g(x)| \to +\infty$, $x \to x_0+$)

a tedy P_1 je blízko 0, P_2 blízko 1

$\Rightarrow$ PS je blízko L, a tedy i LS.

Věta 6.10. (Monotonie a znaménko f'.)

Nechť $f(x)$ je spojité v I, nechť $f'(x) > 0$ (resp. ≥ 0, ≤ 0, < 0) pro $\forall x \in I$ vnitřní. Pak $f(x)$ je rostoucí (resp. neklesající, nerostoucí, klesající) v celém I.

Dk. nechť $x_1 < x_2 \in I$ ... Věta 6.5

$\Rightarrow \exists c \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(c)}_{>0} \cdot (x_2 - x_1)$

nutně $c \in I$ je vnitřní, tedy

$x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$.

Věta 6.11. (Konvexita a monotonie f'.)

Nechť $f(x)$ je spojitá v I, nechť $\exists f'(x)$ vlastní všude uvnitř I, a nechť $f'(x)$ je zde rostoucí (resp. neklesající, nerostoucí, klesající.) Pak $f(x)$ je v I ryze konvexní (resp. konvexní, konkávní, ryze konkávní.)

Dk. nechť $x_1 < x_2 < x_3 \in I$ ... libovolné

2x Věta 6.5 $\Rightarrow$

$$\exists c_1 \in (x_1, x_2): \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c_1)$$

$$\exists c_2 \in (x_2, x_3): \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(c_2)$$

vidíme: $c_1 < c_2$, tedy $f'(c_1) < f'(c_2)$

$\Rightarrow$ ryze konvexní

Věta 6.12. (Konvexita a znaménko f'')

Nechť $f(x)$ je spojitá v I, nechť $\exists f''(x)$ vlastní všude uvnitř I, a nechť zde platí $f''(x) > 0$ (resp. ≥ 0, ≤ 0, < 0). Pak $f(x)$ je v I ryze konvexní (resp. konvexní, konkávní, ryze konkávní).

Dk.: nechť $\tilde{I}$ je vnitřek I

$f''(x) = (f'(x))' > 0$, vlastní v $\tilde{I}$

... Věta 6.11 $\Rightarrow$ $f'(x)$ rostoucí v $\tilde{I}$

... Věta 6.10. $\Rightarrow$ $f(x)$ ryze konvexní v I