Úmluva: I, J ... otevřené intervaly

Def. $F(x)$ se nazve primitivní funkce k $f(x)$ v I, pokud $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$. Značíme $\int f(x)\,dx = F(x)$ v I.

Věta 5.1 (Linearita integrálu).

(1) $$\int a f(x) + b g(x)\,dx = a \int f(x)\,dx + b \int g(x)\,dx \quad v\ I,$$

pokud zde existují integrály vpravo.

(2) Je-li $\int f(y)\,dy = F(y)$ v J, pak také

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} F(ax+b) \quad v\ I,$$

platí-li $\{ax+b;\ x \in I\} \subset J$.

Dk. (1) buď: $\int f(x)\,dx = F(x)$, $\int g(x)\,dx = G(x)$

pak $$\left(aF(x) + bG(x)\right)' = aF'(x) + bG'(x)$$
$$= a f(x) + b g(x) \quad v\ I$$

(2) máme: $F'(y) = f(y)$, $\forall y \in J$

$$\left(\frac{1}{a} F(\underbrace{ax+b}_{\in J})\right)' = \frac{1}{a} \underbrace{F'}_{= f}(ax+b) \cdot \underbrace{(ax+b)'}_{= a}$$
$$= f(ax+b), \quad \forall x \in I.$$

<u>Věta 5.2</u> (Integrace per-partes) nechť $\exists\, u'(x), v'(x)$ vlastní pro $\forall x \in I$. Pak

$$\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx$$

v I.

<u>Dk.</u> nechť $\int u(x)v'(x)\,dx = H(x)$ v I

$$\Rightarrow \left(u(x)v(x) - H(x)\right)' = \left(u(x)v(x)\right)' - H'(x)$$

$$= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - u(x)v'(x)$$

$$= u'(x)v(x),\ x \in I \quad (\text{Věta } 4.2, (3))$$

<u>Př.</u> (1) $\int x \cdot \ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4},\ x \in (0, +\infty)$

$\cdots\ u'(x) = x,\ u(x) = \frac{1}{2}x^2$

$v(x) = \ln x,\ v'(x) = \frac{1}{x}$

(2) $I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int 1 \cdot (1+x^2)^{-n}\,dx$

$u'(x) = 1,\ u(x) = x$

$v(x) = (1+x^2)^{-n},\ v'(x) = (-n)(1+x^2)^{-(n+1)} \cdot 2x$

$$\Rightarrow I_n = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \text{ ; leč}$$

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} = \int \frac{(1+x^2)-1}{(1+x^2)^{n+1}} = I_n - I_{n+1}$$

$\Rightarrow$ rekurentní vztahy: $\quad I_1 = \operatorname{arctg} x$

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \cdot I_n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

<u>Věta 5.3</u> (1. VoS) Nechť $\int g(y)\,dy = G(y)$ v J, a pro $\forall x \in I$ je $f(x) \in J$ a $f'(x) \in \mathbb{R}$.

Pak $\int g(f(x))\, f'(x)\, dx = G(f(x))$ v I.

<u>Dk.</u> víme: $G'(y) = g(y)$, $\forall y \in J$

$$\Rightarrow \left(G(f(x))\right)' = G'(\underbrace{f(x)}_{\in J}) \cdot f'(x) = g(f(x)) f'(x) \quad \forall x \in I$$

dle Věty 4.3

Příkl. (1) $\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2} 2x\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2}$

$\cdots\ g'(y) = e^y,\ f(x) = x^2,\ f'(x) = 2x$

(2) $\int \cos^5 x\,dx = \int \underbrace{\cos^4 x}_{} \cdot \cos x\,dx$

$$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = (1-\sin^2 x)^2$$

$f(x) = \sin x,\ f'(x) = \cos x,\ g(y) = (1-y^2)^2$

$\Rightarrow \int (1-y^2)^2 dy = \int 1 - 2y^2 + y^4\,dy = \cdots$

Věta 5.4 (2. VoS) nechť $D_f \supset I$, nechť $\varphi(t): J \to I$ je vzájemně jednoznačné a nechť $\exists\, \varphi'(t) \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ pro $\forall t \in J$.

Je-li $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = G(t)$ v J,

pak $\int f(x)\,dx = G(\varphi_{-1}(x))$ v I.

Dk. máme: $G'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t),\ \forall t \in J$

$\exists\, \varphi_{-1}(x): I \to J,\ \varphi_{-1}'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(\varphi_{-1}(x))},\ \forall x$

(Věta 4.4)

$$\Rightarrow \left(G(\varphi_{-1}(x))\right)' = G'(\varphi_{-1}(x)) \cdot \left(\varphi_{-1}(x)\right)'$$

$$= f\Big(\underbrace{\varphi(\varphi_{-1}(x))}_{= x}\Big) \cdot \underbrace{\varphi'(\varphi_{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi_{-1}(x))}}_{= 1}$$

$$= f(x),\ \forall x \in I.$$

<u>Příkl.</u> (Lepení z. f.) $f(x) = \max\{1, x^3\}$.

$x \in (-\infty, 1)$: $\int f(x)\,dx = \int 1\,dx = x =: F_1(x)$

$x \in (1, +\infty)$: $\int f(x)\,dx = \int x^3\,dx = \dfrac{x^4}{4} =: F_2(x)$

klíčové: $F_1(x), F_2(x)$ v bodě $x = 1$ „slepíme",

tj. položíme: $F(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{3}{4}, & x > 1 \end{cases}$

Ukážeme: $\int f(x)\,dx = F(x)$ v $\mathbb{R}$, tj.:

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dk. $x \neq 1$ ... jasné z předchozího

$x = 1$ a) z definice („ručně")

b) pomocí Lemmatu 6.2

ad a) $F'(1) = f(1)$, neboť $F'_{\pm}(1) = 1$

$$F_+(1) = \lim_{h\to 0+} \underbrace{\frac{1}{h}\left[F(1+h) - F(1)\right]}_{\frac{1}{h}\left(\frac{1}{4}(1+h)^4 + \frac{3}{4} - 1\right)}$$

$$= 1 + \frac{3}{2}h + h^2 + \frac{1}{4}h^4 \to 1, \ h \to 0+$$

$$F_-(1) = \lim_{h\to 0-} \underbrace{\frac{1}{h}\left[F(1+h) - F(1)\right]}_{\frac{1}{h}\left(1+h-1\right) = 1}$$

ad b) stačí ověřit spojitost $f(x)$, $F(x)$ v bodě $x_0 = 1$, tj. $f(x) \to 1$, $x \to 1\pm$

$F(x) \to 1$, $x \to 1\pm$

(snadné)