__Def.__ $f(x)$ se nazve:

- spojité v x_0 zleva, pokud
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : x \in \mathcal{U}_-(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon)$.
- spojité v x_0 zprava, pokud
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : x \in \mathcal{U}_+(x_0, \delta) \Longrightarrow f(x) \in \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon)$
- spojité v I (na I, vůči I), pokud

pro $\forall x_0 \in I$ platí:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : x \in \mathcal{U}(x_0, \delta) \cap I \Longrightarrow f(x) \in \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon).$$

__Věta 2.12__

(1) $f(x)$ je spojité v x_0 zleva
$\iff f(x) \to f(x_0)$ pro $x \to x_0-$

(2) $f(x)$ je spojité v x_0 zprava
$\iff f(x) \to f(x_0)$ pro $x \to x_0+$

(3) $f(x)$ je spojité v bodě x_0
$\iff$ je tam spojité zleva i zprava

Dk. ad (1), (2): stejně jako Věta 2.5
(jednostranné okolí x_0)

ad (3): $f(x)$ spojité v bodě x_0

$$\Updownarrow \text{ Věta 2.5}$$

$$f(x) \to f(x_0), \text{ pro } x \to x_0$$

$$\Updownarrow \text{ Věta 2.2}$$

$$f(x) \to f(x_0) \text{ pro } x \to x_0\pm$$

$$\Updownarrow \text{ body (1), (2) výše}$$

$f(x)$ spojité v x_0 zleva i zprava

---

ad (3), jinak: přímo z definic,
podobně jako Věta 2.2

Příkl. (1) $\operatorname{sgn}(x)$ … nespojité v $x_0 = 0$
zleva i zprava, neboť $\lim\limits_{x \to 0\pm} \operatorname{sgn}(x) = \pm 1$,
viz výše, leč $\operatorname{sgn}(0) = 0$.

② $f(x) = \lfloor x \rfloor$ … v bodě $x_0 = 0$:

- spojitá zprava, neboť $f(x) = 0$ na $\mathcal{U}_+(0,\delta)$, $\delta > 0$ malé
- nespojitá zleva, neboť $f(x) = -1$ na $P_-(0,\delta)$, tedy $f(x) \to -1$, $x \to 0-$, leč $f(0) = 0$.

③ Dirichletova fce $D(x)$ je spojitá na $\mathbb{Q}$ (neboť $D(x) = 1$, $x \in \mathcal{U}(x_0,\delta) \cap \mathbb{Q}$)

Pozn. interval s krajními body a, b:
(a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$

vnitřní body: (a,b), zřejmě:
$x_0 \in I$ je vnitřní $\iff \exists \delta > 0$ t. ž. $\mathcal{U}(x_0,\delta) \subset I$

$x_0 \in I$ je levý krajní (pravý) $\iff \exists \delta > 0$ t. ž. $\mathcal{U}(x_0,\delta) \cap I = \mathcal{U}_{+(-)}(x_0,\delta)$

Věta 2.13 Nechť $f(x): I \to \mathbb{R}$, I interval.
Potom je ekvivalentní:
(1) $f(x)$ spojité v I
(2) $f(x)$ spojité v každém vnitřním bodě I; je-li levý krajní bod prvkem I, je v něm spojité zprava; je-li pravý krajní bod prvkem I, je v něm spojité zleva
(3) $f(x)$ je spojité zleva v každém bodě I, který není levý krajní, a je spojité zprava v každém bodě I, který není pravý krajní.

Dk. (1) ... pro $\forall x_0 \in I$ platí $(*)$:
$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0: x \in \mathcal{U}(x_0,\delta) \cap I \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(f(x_0),\varepsilon)$$
$(1) \Leftrightarrow (2)$: dle typu bodu
- x_0 vnitřní : BÚNO $\delta>0$ malé t.ž. $\mathcal{U}(x_0,\delta) \subset I$ ... $(*) \Leftrightarrow$ spojitost v x_0

- x_0 levý krajní (pokud leží v I)
  $\delta > 0$ malé: $\mathcal{U}(x_0, \delta) \cap I = \mathcal{U}_+(x_0, \delta)$
  tj.: $(*) \iff$ spojitost v x_0 zprava
- x_0 pravý krajní: podobně

$(2) \iff (3)$ ... opět dle typu bodu

- x_0 vnitřní $\implies$ není krajní, tj.
  $(3) \iff$ spojitost zleva i zprava,
  tj. spojitost (Věta 2.12)
- x_0 levý kr. $\implies$ není pravý kr.
  tj. $(3) \iff$ spojitost zprava
- x_0 pravý kr. ... podobně

<u>Příkl.</u> ① $f(x)$ spojité v $I = (a, b) \iff$
$f(x)$ spojité v $\forall x_0 \in (a, b)$

② $f(x)$ spojité v $I = [0, +\infty) \iff$
$f(x)$ spojité v $\forall x_0 \in (0, +\infty)$,
a spojité v $x_0 = 0$ zprava.

Věta 2.16 (Darbouxova) Nechť $f(x)$ je spojitá v intervalu I. Nechť $a, b \in I$, a nechť y leží mezi $f(a), f(b)$. Potom $\exists\, x_0$ mezi a, b tak, že $f(x_0) = y$.

Dk. BÚNO $f(a) < y < f(b)$, $a < b$.

polož $M = \{x \in [a,b] ;\ f(x) < y\}$.

$\Rightarrow M \neq \emptyset$ (neboť $a \in M$)

shora omezené (číslem $b \in \mathbb{R}$)

Věta A.4 $\Rightarrow \exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ t.ž.

$x_0 = \sup M$, tj. (i) $\forall x \in M: x \leq x_0$

(ii) $\forall x_1 < x_0\ \exists x \in M: x > x_1$

zřejmě: $x_0 \in [a,b]$, neboť:

$a \in M$, b je horní odhad,

x_0 je nejmenší horní odhad

tvrdíme: $f(x_0) = y$ ($\Rightarrow x_0 \in (a,b)$, tj. jsme hotovi)

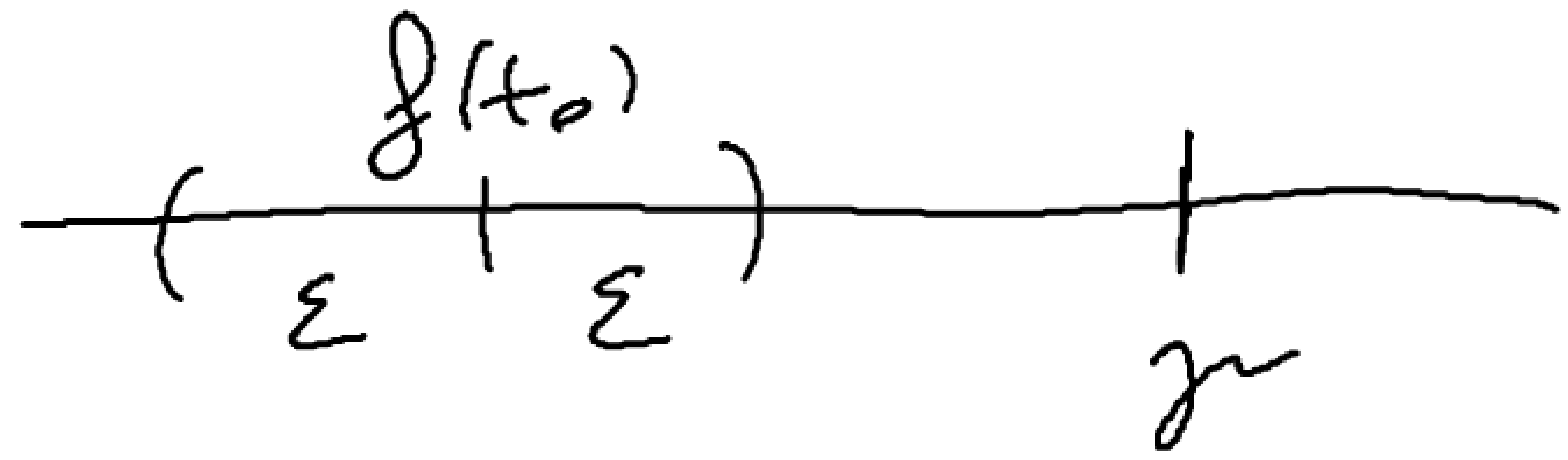
?? $f(t_0) \neq \mu$, tj. buď α) $f(t_0) < \mu$

nebo β) $f(t_0) > \mu$

ad α) nutně $t_0 < b$ $\Rightarrow$ t_0 není pravý krajní bod I

Věta 2.13 $\Rightarrow$ $f(t)$ spojitá v t_0 zprava

vol $\varepsilon > 0$ t.ž. $\mu \notin U(f(t_0), \varepsilon)$



$\exists\, \delta > 0$ t.ž. $x \in U_+(t_0, \delta) = [t_0, t_0 + \delta)$

$\Rightarrow f(t) \in U(f(t_0), \varepsilon)$

a tedy $f(t) < f(t_0) + \varepsilon < \mu$

navíc BÚNO: $t_0 + \delta < b$

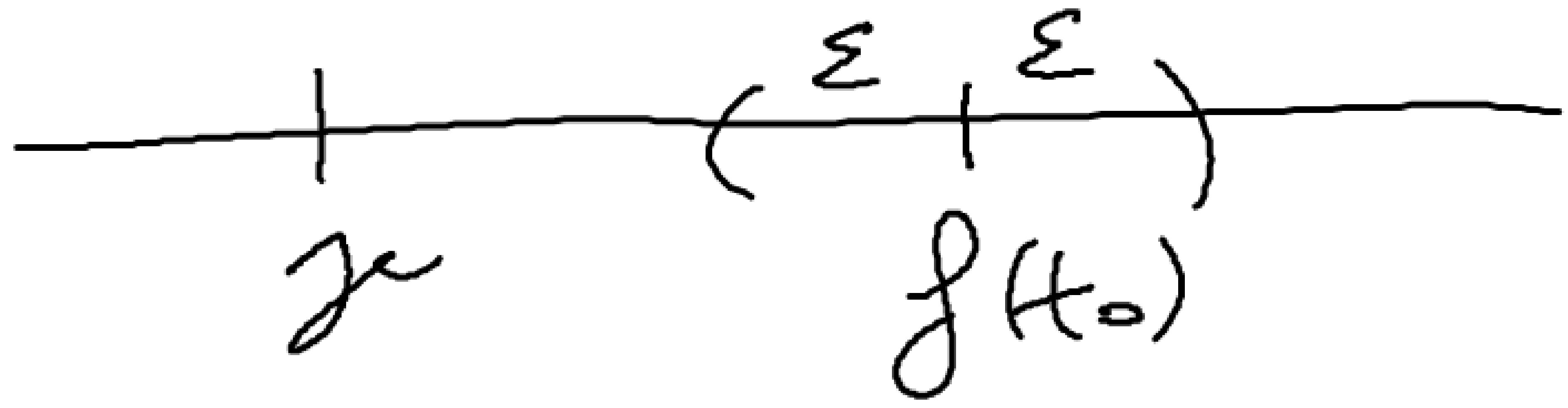
$\Rightarrow [t_0, t_0 + \delta) \subset M$ ... SPOR s (i)

---

ad β) nutně $t_0 > a$ $\Rightarrow$ t_0 není levý kr.

$f(t)$ spojitá v t_0 zleva

vol $\varepsilon > 0$ t.ž. $y \notin U(f(x_0), \varepsilon)$



$\exists\, \delta > 0$ t.ž. $x \in U_-(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0]$

$\Rightarrow f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)$

tj. $f(x) > f(x_0) - \varepsilon > y$

BÚNO: navíc $x_0 - \delta > a$

$\Rightarrow M \cap (x_0 - \delta, x_0] = \emptyset$

SPOR s (ii) ... $x_1 = x_0 - \delta$

<u>Důsledky</u> 1 Věta B ($\exists$ odmocnina)

2 spojitý obraz intervalu je interval

Opak. $f(x)$ nazveme ryze monotónní v I, je-li zde buď rostoucí, nebo klesající.

Věta 2.17. (Spojitost inverzní fce.)

Nechť $f(x): I \to \mathbb{R}$ je spojité, ryze monotónní, kde $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Pak $J := f(I)$ je též interval, $f(x): I \to J$ je prosté, "na" a $f_{-1}(y)$ je spojité v J.

Dk. J interval $\Leftarrow$ Věta 2.16

$f(x): I \to J$ prosté, "na" .. zřejmé ($\Leftarrow$ ryze mon.)

? $f_{-1}(y)$ spojité v J

dle Věty 2.13 $\Longleftrightarrow$ pro $\forall y_0 \in J$ platí:

α) y_0 není levý kr. $\Rightarrow$ $f_{-1}(y)$ spojité v y_0 zleva

β) y_0 není pravý kr. $\Rightarrow$ $f_{-1}(y)$ spojité v y_0 zprava

BÚNO: $f(x)$ klesající (tj. $f_{-1}(y)$ klesající)

jen bod α)   (bod β) podobně)

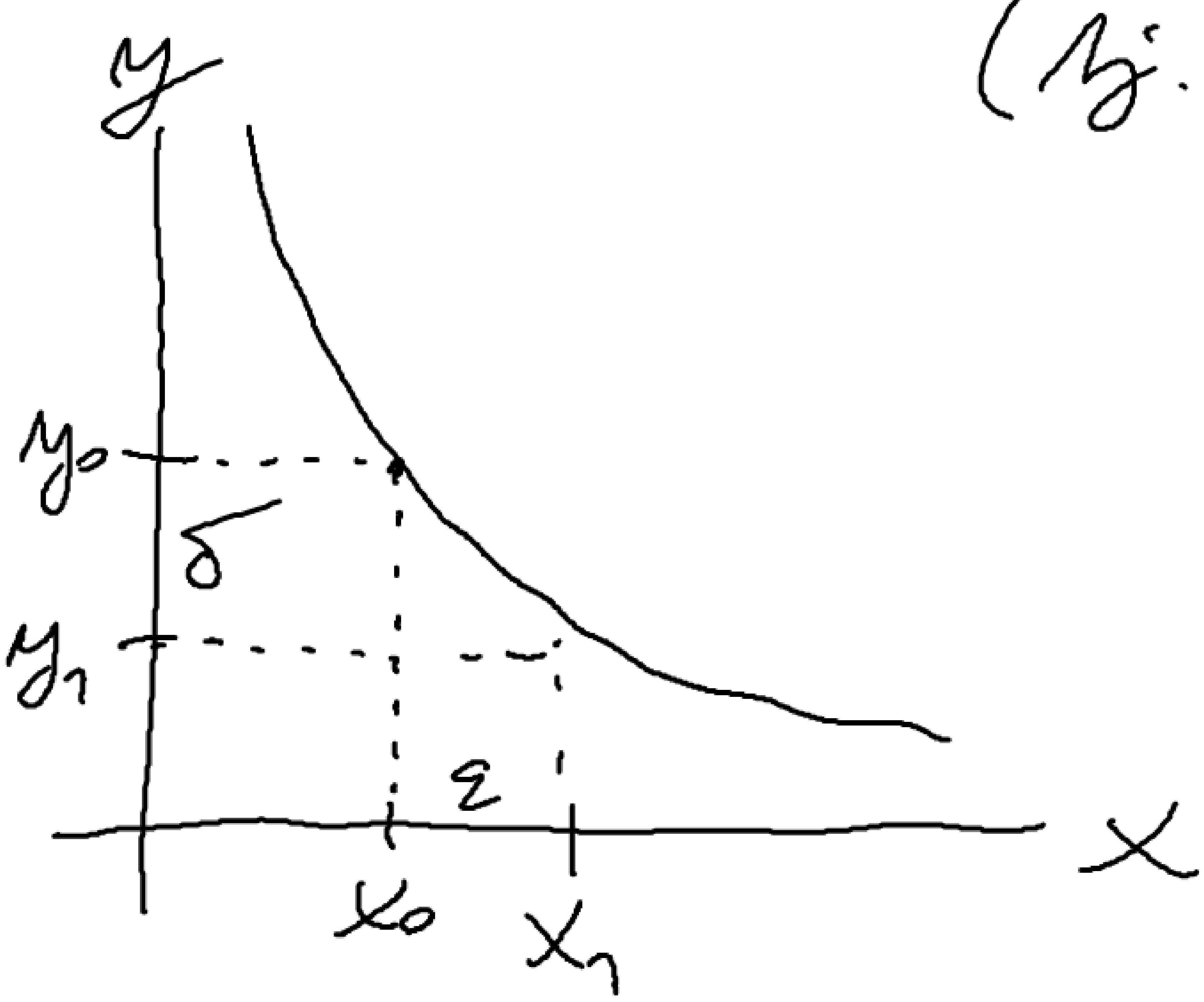
---

nechť $y_0 \in J$ není levý krajní

(tj. minimum J)

$\Rightarrow x_0 = f_{-1}(y_0) \in I$ není pravý krajní

(tj. maximum I)



$\varepsilon > 0$ dáno: BÚNO ε malé t.ž.

$$x_1 = x_0 + \varepsilon \in I$$

$$\Rightarrow y_1 = f(x_1) < f(x_0) = y_0$$

polož $\delta = y_0 - y_1$ ... jsem hotov!

$x \in P_-(y_0, \delta) = (y_1, y_0) \Rightarrow f_{-1}(y) \in (x_0, x_1)$

tj. $\in U(f(x_0), \varepsilon)$