Věta 2.1 (Princip oddělení). Nechť $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^*$. Pak $\exists\, \delta > 0$ t.ž. $\mathcal{U}(x_0, \delta) \cap \mathcal{U}(x_1, \delta) = \emptyset$.

Dk. BÚNO: $x_0 < x_1$ ... různé případy:

1. $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ ... $\mathcal{U}(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$\mathcal{U}(x_1, \delta) = (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$

stačí volit $\delta < \frac{x_1 - x_0}{2}$ $\left(\Leftrightarrow x_0 + \delta < x_1 - \delta \right)$

2. $x_0 = -\infty$ $\quad \mathcal{U}(x_0, \delta) = [-\infty, -\frac{1}{\delta})$

$x_1 = +\infty$ $\quad \mathcal{U}(x_1, \delta) = (\frac{1}{\delta}, +\infty]$

... stačí $\delta = 1$

3. $x_0 = -\infty$, $x_1 \in \mathbb{R}$ ... chceme, aby:

$$\boxed{-\frac{1}{\delta} < x_1 - \delta \quad (*)}$$

α) $x_1 > 0$: polož $\delta = \frac{x_1}{2}$

$\Rightarrow$ LS < 0, PS $= \frac{x_1}{2} > 0$

tj. $(*)$ platí

β) $x_1 \le 0$: stačí $\delta < \min\left\{1, \frac{1}{1-x_1}\right\}$

$\Rightarrow$ (*) opět platí, neboť:

$$LS < x_1 - 1 \quad \left(\Leftarrow \delta < \frac{1}{1-x_1}\right)$$

$$PS > x_1 - 1 \quad \left(\Leftarrow \delta < 1\right)$$

<u>4.</u> $x_0 \in \mathbb{R}, x_1 = +\infty$ ... analogicky

<u>Věta 2.11.</u> Nechť $f(x)$ je monotónní v $I = (a,b)$. Pak $\exists \lim\limits_{x\to a+} f(x), \lim\limits_{x\to b-} f(x)$.

<u>Dk.</u> ... pro $f(x)$ neklesající, tj. $f(x) \le f(y)$ pro $\forall x < y \in I$.

polož $M = f(I) = \{f(x), x \in (a,b)\}$.

<u>1.</u> M shora omezené ($\Leftrightarrow f(x)$ shora omez. na $I = (a,b)$)

Věta A.4 $\Rightarrow \exists A \in \mathbb{R}$ t.ž. $A = \sup M$

ukážeme: $f(x) \to A$, $x \to b-$.

připomeň: $A = \sup M$ značí:

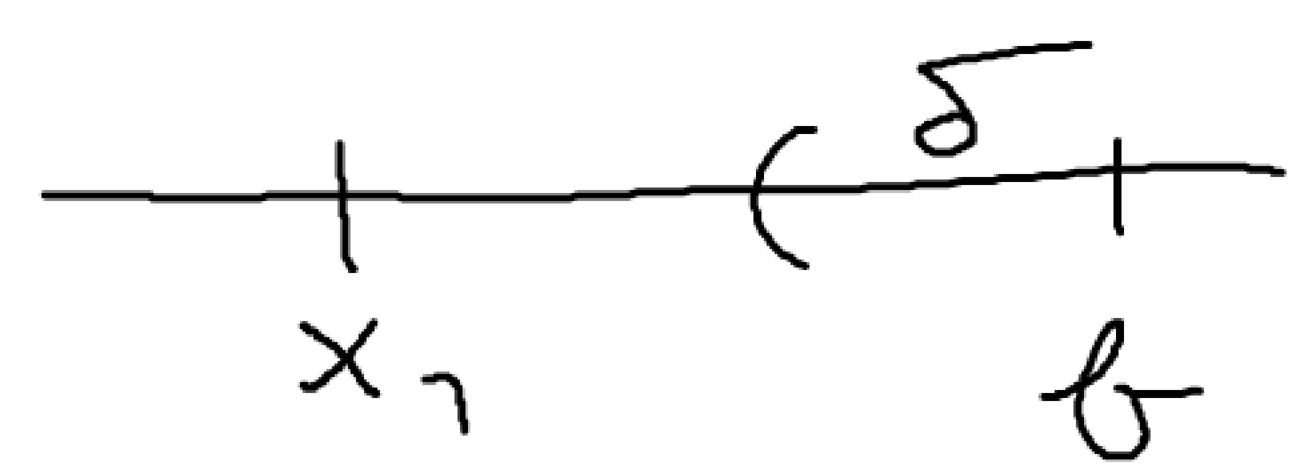
(i) $\forall x \in I : f(x) \le A$

(ii) $\forall A' < A \ \exists x_1 \in I : f(x_1) > A'$

$\varepsilon > 0$ dáno: $A' = A - \varepsilon < A$, a tedy

(ii) $\Rightarrow \exists x_1 \in I : f(x_1) > A - \varepsilon$

Věta 2.1 $\Rightarrow \exists \delta > 0$ t.ž. x_1 leží nalevo od $P_-(b,\delta)$:



$\Rightarrow$ jsem hotov, neboť:

$x \in P_-(b,\delta) \Rightarrow x > x_1$, a tedy

$$\underline{f(x)} \ge f(x_1) > \underline{A - \varepsilon}$$

zároveň díky (i): $f(x) \le A$ pro $\forall x \in I = (a,b)$.

$\Rightarrow f(x) \in (A-\varepsilon, A] \subset U(A,\varepsilon)$

2. Γ shora neomezené

($\Leftrightarrow f(x)$ shora neomezená na I)

ukážeme, že $f(x) \to +\infty$, $x \to b-$.

$\varepsilon > 0$ dáno: $\exists\, x_1 \in I : f(x_1) > \frac{1}{\varepsilon}$

a dále podobně:

$\exists\, \delta > 0$ t. ž. x_1 je nalevo od $P_-(b, \delta)$

.... $x \in P_-(b, \delta) \Rightarrow f(x) \geq f(x_1) > \frac{1}{\varepsilon}$

a tedy $f(x) \in \mathcal{U}(+\infty, \varepsilon)$