Série 10 - termín 23.5.

① Vypočtěte Fresnelovy integrály

$$I = \int_0^\infty \sin(x^2)\,dx, \qquad J = \int_0^\infty \cos(x^2)\,dx,$$

pomocí Cauchyho věty. Podrobněji: definujme holomorfní funkci $f(z) = \exp(iz^2)$ a Jordanovu křivku $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \ominus \varphi_3$, kde (nakreslete obrázek!)

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= t, \quad t \in [0, R] \\ \varphi_2(t) &= R\exp(it), \quad t \in [0, \pi/4] \\ \varphi_3(t) &= t\exp(i\pi/4), \quad t \in [0, R] \end{aligned}$$

Máme tedy $0 = \int_\varphi f(z)\,dz$. Nyní uvažte, že pro $R \to +\infty$:
(i) $\int_{\varphi_1} f(z)\,dz$ souvisí s hledanými I, J
*(ii) $\int_{\varphi_2} f(z)\,dz \to 0$
(iii) $\int_{\varphi_3} f(z)\,dz$ souvisí se (známým) Dirichletovým integrálem $\int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi x^2)\,dx = 1$.

② Nalezněte řešení rovnice s počáteční podmínkou

$$y' = ay, \quad y(0) = 1$$

pomocí limity Picardovských iterací, tj. $y_0(x) \equiv 1$ a dále induktivně

$$y_{n+1}(x) = y(0) + \int_0^x y_n(t)\,dt$$

Ověřte, že nalezená limitní funkce $y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$ je opravdu řešením původní úlohy.

③ Metodou separace proměnných nalezněte (obecné) řešení rovnice

$$y' = -y^2 2x$$

kde $y = y(x)$ je neznámá funkce proměnné x.

④ Pomocí „Ansatzu" $y = e^{\lambda x}$, kde λ je pevné (obecně komplexní) číslo, hledejte řešení následujících diferenciálních rovnic:
(i) $y'' + 3y' - 40y = 0$
(ii) $y'''' - y = 0$
(iii) $y^{(5)} = 0$

Viz též nápovědu na další straně.

ad 1) Mělo by vyjít $I = J = \pi/2\sqrt{2}$.

ad 2) $y_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(ax)^j}{j!}$

ad 3) Formálně pišme $y' = dy/dx$ a upravme na $-dy/y^2 = 2x\,dx$, integrujme obě strany dle y resp. dle x.

ad 4) Dosazení a úprava vede na polynomiální rovnici v λ; každý její kořen odpovídá řešení původní diferenciální rovnice. Rovnici (iii) stačí (pětkrát) integrovat.