Série 9 - termín 6.5.

① (i) Ukažte, že zobrazení $z \mapsto az + b$, kde a, $b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ zachovává úhly.
(ii) Jak z toho plyne analogická vlastnost pro holomorfní funkce?

② [Zavedení hlavní větve logaritmu.] Nechť $U = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Definujme $L(1) = 0$ a pro $z \in U$, $z \neq 1$

$$L(z) = \int_{\varphi_z} \frac{dz}{z},$$

kde φ_z je libovolná křivka v U, jdoucí od bodu 1 k bodu z. Ukažte, že pro $\forall z \in U$:
(i) $L'(z) = 1/z$
(ii) $\exp(L(z)) = z$

③ [Exercise 16, Lecture 10] Nechť $\varphi(t) = z_0 + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $\rho > 0$; nechť $k \in \mathbb{Z}$. Vypočtěte

$$\int_{\varphi} (z - z_0)^k \, dz$$

④ Pro dané n přirozené vypočtěte integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin nt}{\sin t} \, dt$$

pomocí „substituce“ $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

ad 1) (i) rozepište $z \mapsto az$ jako lineární zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a užijte poznatků lineární algebry / geometrie

(ii) Taylorův rozvoj $f(z_0 + z) = \ldots$

ad 2) (i) Vyjádřete přírůstek $L(z+h) - L(z)$ jako integrál přes úsečku mezi z a $z+h$; vydělte $h \to 0+$.

(ii) Ukažte, že funkce $F(z) = z\exp(-L(z))$ je konstantní v U, s užitím bodu (i) a úlohy 5 předchozího d.ú.

ad 3) Přímo z definice, nebo (pro $k \neq -1$) lze užít úlohu 5 předchozího d.ú.

ad 4) pomocí $dz = ie^{it}dt$ a $\sin nt = (z^n - z^{-n})/2i$ převedu na $\int_\varphi f(z)\,dz$ pro jistou funkci $f(z)$. Dále lze psát (geometrická řada!)

$$f(z) = \sum_k a_k z^k$$

a užiji úlohu 3.