Série 1 - termín středa 26. února 2025

① [Exercise 3.] Nechť ABC je pravoúhlý trojúhelník. Dokažte, že přepona je striktně delší než libovolná odvěsna.

② [Exercise 6.] Nechť X je prostor všech spojitých funkcí na intervalu $I = [a, b]$. Ukažte, že

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| \, dx$$

je norma.

③ [Exercise 18.] Nechť (M, d) je ultrametrický prostor. Označme

$$B(x, r) = \{y \in M;\ d(x, y) < r\}$$

kouli o středu x a poloměru $r > 0$. Ukažte, že pro libovolné $z \in B(x, r)$ je $B(x, r) = B(z, r)$.

④ [podle Exercise 13.] Nechť X je vektorový prostor se skalárním součinem, nechť $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ je příslušná norma. Ukažte, pro dané a, $b \in X$ je $c = (a + b)/2$ jediný bod, vyhovující podmínce $\|a - c\| = \|b - c\| = \|a - b\|/2$.

⑤ Který z následujících předpisů určuje metriku v $\mathbb{R}$? Dokažte nebo vyvraťte.
(i) $d(x, y) = (x - y)^2$
(ii) $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$
(iii) $d(x, y) = \exp(x - y) - 1$

Viz též nápovědu na straně 2.

ad 1) *Použijte poučky elementární geometrie.*

ad 2) *Uvažte, že* $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)|$ *platí pro každé* $x \in I$ *pevné a užijte vlastnosti (Riemannova) integrálu.*

ad 3) *Viz Proposition 17 a jeho důkaz.*

ad 4) *BÚNO (bez újmy na obecnosti)* $a + b = 0$ *(proč to lze?) Pracujte se čtverci norem a užijte vlastnosti skalárního součinu.*