Elementární odvození Stirlingovy formule

Mirko Rokyta*

31.1.2006

Abstrakt

„Elementární“ v tomto kontextu znamená, že pro odvození budou potřeba pouze „základní“ znalosti, kterými by měl vládnout každý student MFF UK po absolvování prvních dvou semestrálních kurzů matematické analýzy. Kdo zná Wallisovu formuli pro π, bude mít o paragraf kratší čtení, pro úplnost zde však uvádíme i její odvození, vycházející ze základních znalosti o určitém integrálu.

1

Našim cílem je dokázat tzv. *Stirlingovu formuli*, neboli následující tvrzení: pro všechna $n \in \mathbb{N}$ existuje $\theta_n \in (0,1)$ takové, že platí

$$n! = \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}\,.$$

Nejprve učiníme některé přípravné úvahy. Z teorie Taylorových řad víme, že pro $|x| < 1$ je

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\dots\,, \qquad \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\dots\,.$$

Odečtením těchto rovností dostaneme:

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2x\Big(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \frac{x^6}{7}\dots\Big)\,, \qquad |x| < 1\,. \tag{1}$$

Položme v tomto vztahu $x = \frac{1}{2n+1}$, tedy $\frac{1+x}{1-x} = (1 + \frac{1}{n})$, a vynásobme rovnost (1) výrazem $\frac{1}{2x} = (n + \frac{1}{2})$:

$$\Big(n + \frac{1}{2}\Big)\ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) = 1 + \frac{1}{3\,(2n+1)^2} + \frac{1}{5\,(2n+1)^4} + \frac{1}{7\,(2n+1)^6}\dots\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2}$$

Pravá strana rovnosti (2) je jednak evidentně větší než 1, jednak, odhadneme-li číselné koeficienty u zlomků triviálně: $\frac{1}{5} < \frac{1}{3}$, $\frac{1}{7} < \frac{1}{3}$, atd., dostaneme geometrickou řadu s kvocientem $\frac{1}{(2n+1)^2}$, kterou sečteme:

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{3\,(2n+1)^2} + \frac{1}{5\,(2n+1)^4} + \dots \quad &< \quad 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \frac{1}{(2n+1)^6} + \dots\right) = \\
&= \quad 1 + \frac{1}{3}\,\frac{1}{(2n+1)^2}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{(2n+1)^2}} = \\
&= \quad 1 + \frac{1}{3}\,\frac{1}{4n^2+4n} = 1 + \frac{1}{12n(n+1)}\,.
\end{aligned}$$

Ukázali jsme tedy, že

$$1 < \Big(n + \frac{1}{2}\Big)\ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)}\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

*Podle Fichtěngolcovy knihy [1].

Odtud máme (protože exp je rostoucí funkce),

$$e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,,$$

neboli po vydělení číslem $e = \exp(1)$:

$$1 < \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}}\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,. \tag{3}$$

2

Položme nyní

$$a_n := \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}\,, \qquad b_n := e^{\frac{1}{12n}}\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,. \tag{4}$$

Potom

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}{(n+1)!e^{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\,, \qquad \frac{b_n}{b_{n+1}} = e^{\frac{1}{12n}-\frac{1}{12(n+1)}} = e^{\frac{1}{12n(n+1)}}\,.$$

Lze tedy (3) psát ve tvaru

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{b_n}{b_{n+1}}\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,. \tag{5}$$

Z první z nerovností v (5) a z definice a_n vidíme, že $a_n > a_{n+1} > 0$, tj. a_n je klesající zdola omezená posloupnost, a tedy existuje vlastní $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =: a \geq 0$. Protože $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$, máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = a\,.$$

Z (5) však rovněž plyne $\frac{a_n}{b_n} < \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$, posloupnost $\frac{a_n}{b_n}$ je tedy rostoucí, přitom má stejnou limitu a jako klesající posloupnost a_n. Odtud dostaneme

$$\frac{a_n}{b_n} < a < a_n\,, \qquad \text{tj.} \quad a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a < a_n e^0\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,. \tag{6}$$

Protože (pro každé $n \in \mathbb{N}$) je funkce „$x \mapsto a_n \exp(-\frac{x}{12n})$“ spojitá na intervalu $\langle 0, 1\rangle$, nabývá na něm všech mezihodnot, tedy i (viz (6)) hodnoty a. Existuje tedy $\theta_n \in (0,1)$ takové, že $a = a_n e^{-\frac{\theta_n}{12n}} = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} e^{-\frac{\theta_n}{12n}}$. Odtud spočteme $n! = a\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}$. Tím jsme ukázali, že

$$\text{existuje } a \in \mathbb{R} \text{ takové, že pro všechna } n \in \mathbb{N} \text{ existuje } \theta_n \in (0,1), \text{ že} \qquad n! = a\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}\,. \tag{7}$$

3

Číslo a v (7) spočteme pomocí *Wallisovy formule*:[1]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \pi\,. \tag{8}$$

Rozšíříme zlomek uvnitř druhé mocniny výrazem $(2n)!!$ a uvážíme, že $(2n-1)!! \cdot (2n)!! = (2n)!$, a také, že $(2n)!! = 2^n n!$. Vzniklé faktoriály poté vyjádříme pomocí (7) a upravíme:

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{((2n)!!)^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}\left(a\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}\right)^2}{a\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} e^{\frac{\theta_{2n}}{24n}}} = a\sqrt{\frac{n}{2}}\, e^{\frac{4\theta_n-\theta_{2n}}{24n}}\,.$$

[1] Pokud je Wallisova formule čtenářovi známá, tím lépe. Pokud ne, lze její nepříliš obtížné odvození nalézt v následujícím paragrafu. V něm se také lze dočíst o dvojfaktoriálech (!!), viz (11).

Ze (8) pak dostaneme

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(a\sqrt{\frac{n}{2}} e^{\frac{4\theta_n - \theta_{2n}}{24n}} \right)^2 = \frac{a^2}{2} \lim_{n\to\infty} e^{\frac{4\theta_n - \theta_{2n}}{12n}} = \frac{a^2}{2}\,,$$

neboť θ_n, $\theta_{2n} \in (0,1)$. Proto je $a = \sqrt{2\pi}$ a my jsme ukázali, že

$$\text{pro všechna } n \in \mathbb{N} \text{ existuje } \theta_n \in (0,1), \text{ že} \qquad n! = \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}\,. \tag{9}$$

Všimněte si, že pro výpočet hodnoty a nebylo nutné vědět, jak je a definováno. Potřebovali jsme pouze vědět, že existuje takové $a \in \mathbb{R}$, pro které platí (7).

4

Odvodíme ještě pro úplnost Wallisovu formuli (8). Nejprve spočteme $I_k := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k x\,dx$ pro každé celé $k \geq 0$. Přímým výpočtem obdržíme $I_0 = \frac{\pi}{2}$ a $I_1 = 1$, a pro obecné $k \geq 2$ použijeme metodu per partes:

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k x\,dx = \Big[-\cos x \sin^{k-1} x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (k-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{k-2} x\,dx = \\ &= 0 + (k-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\,\sin^{k-2} x\,dx = (k-1)\,I_{k-2} - (k-1)\,I_k\,. \end{aligned}$$

Odtud jednoduše dostáváme následující rekurentní formuli $I_k = \frac{k-1}{k}\,I_{k-2}$, $k = 2,3,\ldots$. Jejím opakovaným použitím zvlášť pro $k = 2n$ a $k = 2n+1$, a s využitím znalosti hodnot I_0 a I_1 dostaneme pro $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2}\,, \\ I_{2n+1} &= \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2n}{2n+1}\,. \end{aligned}$$

Už jsme skoro hotovi: Vzhledem k tomu, že máme $x \in \langle 0, \pi/2\rangle$ a tedy $\sin x \in \langle 0,1\rangle$, platí na $\langle 0,\pi/2\rangle$ a pro všechna přirozená n nerovnosti $\sin^{2n} x \geq \sin^{2n+1} x \geq \sin^{2n+2} x$. Integrací těchto nerovností od 0 do $\frac{\pi}{2}$ dostaneme $I_{2n} \geq I_{2n+1} \geq I_{2n+2}$, neboli

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi \geq \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1} \geq \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi\,.$$

Vydělme tuto nerovnost koeficientem u π v členu vlevo a dostaneme

$$\pi \geq \frac{2}{2n+1}\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{2n}{2n-1}\right)^2 \geq \frac{2n+1}{2n+2}\cdot\pi\,.$$

Protože posloupnost vpravo má limitu π, má tutéž limitu i posloupnost uprostřed, a tedy platí

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2n+1}\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{2n}{2n-1}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right)^2\,, \tag{10}$$

použijeme-li obvyklé značení

$$(2n)\,!! := 2.4\ldots 2n\,, \qquad (2n-1)\,!! := 1.3\ldots(2n-1)\,, \qquad n = 1,2,\ldots\,, \tag{11}$$

(pro $n = 0$ klademe $0\,!! := 1$, $(-1)\,!! := 1$). Z definic (11) snadno plyne $(2n-1)!!\cdot(2n)!! = (2n)!$, a také $(2n)!! = 2^n n!$.

Reference

[1] Fichtěngolc, G.M.: Kurs differencialnogo i integralnogo isčislenija, Moskva, 1966.

Doc. RNDr. Mirko Rokyta, CSc.
Katedra matematické analýzy MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
mirko.rokyta@mff.cuni.cz