23. Fourierova transformace.

Definice. Pro $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definujeme Fourierovu transformaci

$$\big[\mathcal{F}f\big](\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-2\pi i(x,\xi)}\, f(x)\,dx\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n\,.$$

Dále definujeme inverzní Fourierovu transformaci

$$\big[\mathcal{F}_{-1}f\big](\xi) = \check{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{2\pi i(x,\xi)}\, f(x)\,dx\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n\,.$$

Zde (x,ξ) je skalární součin x, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Poznámky.
- korektnost: $|\exp\{\pm 2\pi i(x,\xi)\}| = 1$, majoranta integrálu $|f(x)| \in L^1$
- $\mathcal{F}$ přiřazuje funkci $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ funkci $\widehat{f}(\xi) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$
- jiná varianta definice (ne ekvivalentní):

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} f(x)\,dx\,, \qquad \check{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} f(x)\,dx\,.$$

- vztah $\mathcal{F}_{-1}\{\mathcal{F}f\} = f$ není zřejmý, ověříme časem
- Pro $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos 2\pi\xi x\,dx - i \int_{\mathbb{R}} f(x) \sin 2\pi\xi x\,dx\,.$$

(Souvislost s Fourierovými řadami.)

Příklad. $f(x) = 1$ pro $x \in (-1,1)$ a 0 jinde. Potom $\widehat{f}(0) = 2$ a

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}\,, \qquad \xi \neq 0\,.$$

Věta 23.1. Nechť $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom
(1) $\check{f}(\xi) = \widehat{f}(-\xi)$
(2) $\overline{\check{f}}(\xi) = \widehat{\overline{f}}(\xi)$, $\overline{\widehat{f}}(\xi) = \check{\overline{f}}(\xi)$
(3) $\widehat{f}(\xi - \eta) = \big[\widehat{e^{2\pi i(x,\eta)} f(x)}\big](\xi)$, $\eta \in \mathbb{R}^n$ pevné
(4) $\widehat{f(x-z)}(\xi) = e^{-2\pi i(\xi,z)}\widehat{f}(\xi)$, $z \in \mathbb{R}^n$ pevné
(5) $\widehat{f(\varepsilon x)}(\xi) = \frac{1}{|\varepsilon|^n}\widehat{f}(\xi/\varepsilon)$ pro $\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Definice. Funkce $f(x)$ se nazve radiálně symetrická, pokud $f(x)$ závisí jen na $|x|$ (=norma x). Ekvivalentně: $f(Qx) = f(x)$ pro libovolné otočení Q kolem počátku.

Věta 23.2. [Zachování symetrie.] Nechť $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ je sudá (resp. lichá resp. radiálně symetrická.) Potom $\widehat{f}$ má stejnou vlastnost.

Značení. Prostory funkcí $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.
• $L^p(\mathbb{R}^n)$ ... L^p-integrovatelné, $\|f\|_{L^p} = \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx\right]^{1/p}$
• $C_b(\mathbb{R}^n)$ ... spojité a omezené, $\|f\|_{C_b} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|$
• $C_0(\mathbb{R}^n)$ ... s limitou 0 v nekonečnu:

$$C_0(\mathbb{R}^n) = \{f \in C_b(\mathbb{R}^n) :\ |f(x)| \to 0 \text{ pro } |x| \to +\infty\}$$

• $C_c(\mathbb{R}^n)$ ... spojité s kompaktním nosičem:

$$C_c(\mathbb{R}^n) = \{f \in C(\mathbb{R}^n) :\ f(x) = 0 \text{ pro } |x| > R\}$$

Platí inkluze: $C_c \subset C_0 \subset C_b$ a $C_c \subset L^1$.

Věta 23.3. $\mathcal{F}$ je spojité lineární zobrazení z $L^1(\mathbb{R}^n)$ do $C_b(\mathbb{R}^n)$ a platí

$$\|\widehat{f}\|_{C_b} \leq \|f\|_{L^1}\,.$$

Věta 23.4. [Vztah F.t. a derivace.]
(1) Nechť $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C_0(\mathbb{R}^n)$ a $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$. Potom

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = 2\pi i \xi_j \widehat{f}(\xi)\,.$$

(2) Nechť $f(x)$, $x_j f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_j}(\xi) = \left[-\widehat{2\pi i x_j f(x)}\right](\xi)\,.$$

Poznámka. Názorně: derivace f dle x_j odpovídá násobení $\widehat{f}$ ($2\pi i$ krát) ξ_j. A naopak: derivace $\widehat{f}$ dle ξ_j odpovídá násobení ($-2\pi i$ krát) x_j.

Příklad. Připomeňme, že $\Delta u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$. Platí:

$$\left[\widehat{\Delta u(x)}\right](\xi) = -4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{u}(\xi)\,.$$

Věta.[1] [Hustota hladkých funkcí v L^p.] Pro libovolné $p \in [1,\infty)$ je množina $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ hustá v $L^p(\mathbb{R}^n)$, tj.

$$\Big(\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)\Big)\Big(\forall \varepsilon > 0\Big)\Big(\exists \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\Big)\big[\|f-\phi\|L^p < \varepsilon\big]$$

[1] Bez důkazu.

Poznámky.
• “hluboké” tvrzení o Lebesgueově integrálu.
• důsledek (fakticky ekvivalentní): ke každé funkci $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ existuje posloupnost funkcí $\phi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tak, že $\phi_n \to f$ v normě $L^p(\mathbb{R}^n)$.
• pozor: neplatí pro $p = \infty$.

Věta 23.5. [Nulovost F.t. v nekonečnu.] Nechť $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom $\widehat{f}(\xi) \to 0$ pro $|\xi| \to \infty$.

Definice. Pro $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definujeme nosič funkce $\operatorname{supp} f$ jako uzávěr množiny

$$\{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) \neq 0\}\,.$$

Ekvivalentně: nosič je nejmenší uzavřená množina K taková, že $f = 0$ na $\mathbb{R}^n \setminus K$.

Věta 23.6. Nechť $f(x)$ je spojitá v $\mathbb{R}$ a má omezený nosič. Nechť $\widehat{f}$ má omezený nosič. Potom nutně $f = 0$.

Poznámka. Hledáme prostor funkcí X tak, že $\mathcal{F} : X \to X$, v ideálním případě vzájemně jednoznačně.
Předchozí věta ukazuje, že funkce s omezeným nosičem nejsou vhodný kandidát. Podobně se ukazuje, že $\mathcal{F}L^1 \not\subset L^1$.
Vhodným kandidátem se ukáže Schwartzův prostor definovaný níže, a později též prostor L^2.

Definice. Multiindexem nazývám n-tici čísel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, kde $\alpha_j \geq 0$ jsou celá. Číslo $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ nazývám výška (stupeň) multiindexu. Pro funkci $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definuji

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}\,.$$

Pro vektor $x \in \mathbb{R}^n$ definuji

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}\,.$$

Příklady. Nechť $\alpha = (1, 0, 2)$. Potom

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_1 \partial x_3^2}\,, \qquad x^\alpha = x_1 x_3^2\,.$$

Zobecnění Věty 23.4. (1) Nechť $D^\alpha f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C_0(\mathbb{R}^n)$ pro každý multiindex $|\alpha| \leq k$. Potom

$$[D^\alpha f]\widehat{\ }(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi) \qquad \forall |\alpha| \leq k\,.$$

(2) Nechť $x^\alpha f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pro každý multiindex $|\alpha| \le k$. Potom

$$\big[D^\alpha \widehat{f}\big](\xi) = \big[\widehat{(-2\pi i x)^\alpha f(x)}\big](\xi) \qquad \forall |\alpha| \le k\,.$$

Definice. Schwartzův prostor (prostor rychle klesajících funkcí) definujeme jako

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) = \big\{ f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n);\ x^\alpha D^\beta f(x) \ \text{ omezená pro } \ \forall\ \alpha,\, \beta \big\}\,.$$

Lemma 23.1. [Integrace radiálních funkcí.] Nechť $f(|x|) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ je radiální. Potom

$$\int_{|x|<R} f(|x|)\,dx = \kappa_{n-1} \int_0^R f(r) r^{n-1}\,dr\,,$$

kde κ_{n-1} je $(n-1)$-rozměrná míra množiny $S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n :\ |x| = 1\}$.
Důsledek. $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1+|x|)^p} < \infty$, právě když $p > n$.

Věta 23.7. [Základní vlastnosti $\mathscr{S}$.]
(1) $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subsetneqq \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$
(2) $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$, $\forall p \ge 1$
(3) $f(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \implies x^\alpha f(x),\ D^\alpha f(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\forall \alpha$

Definice. Funkce $\exp(-\pi|x|^2)$ se nazývá gausián.

Lemma 23.2. [F.t. gausiánu.] Platí

$$\big[\widehat{\exp(-\pi|x|^2)}\big](\xi) = \exp(-\pi|\xi|^2)\,.$$

Věta 23.8. $\mathcal{F}\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Definice. Pro $f(x)$, $g(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definuji konvoluci

$$[f * g](x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\,dy$$

pokud má integrál smysl.

Věta 23.9. [Vlastnosti konvoluce.]
(1) komutativita: $[f * g](x) = [g * f](x)$
(2) Nechť $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g(x) \in L^q(\mathbb{R}^n)$, kde $1/p + 1/q = 1$. Potom $[f * g](x)$ má smysl pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ a platí odhad

$$|[f * g](x)| \le \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n\,.$$

(3) Nechť $f(x)$, $g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom $[f * g](x)$ má smysl pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ a platí odhad

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} .$$

Věta 23.10. [Vztah F.t. a konvoluce.] Nechť $f(x)$, $g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom

$$\big[\widehat{[f * g](x)}\big](\xi) = \widehat{f}(\xi)\, \widehat{g}(\xi) .$$

Poznámky. Diracova funkce $\delta(x)$ je charakterizována následující vlastností: $\delta(x) = 0$ pro $\forall x \neq 0$, avšak $\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x)\, dx = 1$.
Prostory funkcí nám dosud známé (spojité, integrovatelné funkce) takovouto funkci NEOBSAHUJÍ. To je jeden z důvodů, proč zavádět i obecnější prostory (např. prostor distribucí.)
Podívejme se (čistě formálně) na další vlastnosti $\delta(x)$. Pro každou spojitou funkci $f(y)$ platí

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\delta(y)\, dy = f(0) .$$

Tudíž

$$[f * \delta](x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)\delta(y)\, dy = f(x - y)|_{y=0} = f(x) ,$$

neboli $f * \delta = f$. Fourierova transformace Diraca je

$$\widehat{\delta}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-2\pi i(\xi,x)}\, \delta(x)\, dx = 1 .$$

Vzhledem k Větě 23.5. opět vidíme, že $\delta(x) \notin L^1(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 23.3. [Aproximace Diracovy funkce.] Nechť $f(x) \in C_b(\mathbb{R}^n)$, nechť $\varphi(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ a $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = 1$. Označme $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(\varepsilon^{-1}x)$. Potom

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} [f * \varphi_\varepsilon](x) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n .$$

Věta 23.11. [Inverze F.t.] Nechť $f(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Potom $[\hat{f}(\xi)]\check{}(x) = f(x)$ a $[\check{f}(\xi)]\hat{}(x) = f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$.

Poznámka. Věta fakticky dokázána za předpokladu $\hat{f} \in C_b \cap L^1$, $\check{f} \in L^1$.

Důsledek. F. t. je vzájemně jednoznačné zobrazení $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ na $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 23.4. Nechť $f(x)$, $g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x)\, dx , \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\check{g}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \check{f}(x)g(x)\, dx .$$

Předběžné úvahy. Naším cílem je nyní rozšířit $\mathcal{F}$ na prostor $L^2(\mathbb{R}^n)$. Připomeňme, že

$$L^2(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} :\ f \text{ je měřitelná, } \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \, dx < \infty \right\}.$$

Na tomto prostoru definujeme skalární součin a normu takto:

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} \, dx \,, \tag{1}$$

$$\|f\|_{L^2} = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \, dx \right\}^{1/2} . \tag{2}$$

K hlubším vlastnostem patří: $L^2(\mathbb{R}^n)$ je úplný, a množina $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ je v něm hustá.

Věta 23.12. [Plancherelova rovnost.] Nechť $f(x)$, $g(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Potom

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} \, d\xi \,.$$

Jinými slovy, $\mathcal{F}$ zachovává skalární součin v $L^2(\mathbb{R}^n)$, speciálně zachovává normu, tj. $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$ pro $\forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Věta 23.13. [F.t. v L^2.] Existuje lineární zobrazení $\mathcal{F}_2 : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ takové, že
(1) $\mathcal{F}_2 f = \mathcal{F} f$ pro $\forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$
(2) $\mathcal{F}_2$ je izomorfismus $L^2(\mathbb{R}^n)$ na sebe, tj. vzájemně jednoznačné zobrazení, zachovávající normu a skalární součin.

Poznámka. Jak prakticky počítat $\mathcal{F}_2$? Lze dokázat, že pro dané $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ existují $R_n \to \infty$ taková, že pro skoro všechna ξ je

$$\mathcal{F}_2 f(\xi) = \lim_{n \to \infty} \int_{|x| < R_n} \mathrm{e}^{-2\pi i (x, \xi)} f(x) \, dx \,.$$

Speciálně odtud plyne, že pro $f \in L^1 \cap L^2$ je $\mathcal{F}_2 f = \mathcal{F} f$. Nadále tedy budeme psát prostě $\mathcal{F} f$ či $\hat{f}$ místo $\mathcal{F}_2 f$.

Poznámky. "Principem neurčitosti" rozumíme, zhruba řečeno, pozorování, že čím je f „koncentrovanější", tím je $\hat{f}$ „rozptýlenější", a naopak: koncentrovanost $\hat{f}$ nutně implikuje rozptýlenost f.
Existuje mnoho vět, která tento princip neurčitosti vyjadřují matematicky přesně. Všimněme si několika příkladů.

① Označ $f_\lambda(x) = \lambda^{-n/2} f(x/\lambda)$. Pozoruji, že $\|f_\lambda\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$. Přitom tato operace koncentruje ($\lambda \to 0$) nebo rozptyluje ($\lambda \to \infty$). Z Věty 23.1.(5) vidíme, že $\widehat{[f_{1/c}]} = [\widehat{f}]_c$.
② Větu 23.6. lze interpretovat tak, že jistá koncentrovanost nosiče f implikuje rozptýlenost nosiče $\hat{f}$.
③ Krajní případ: Dirac (maximálně koncentrovaná funkce) se transformuje na 1 (maximálně rozptýlená funkce.)
④ Definujeme operátory (pro jednoduchost na prostoru $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$) $X : f(x) \mapsto xf(x)$, a $D : f(x) \mapsto \frac{1}{2\pi i} f'(x)$. Máme

$$\|Xf\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 x^2 \, dx \,,$$

což v jistém smyslu měří rozptýlenost f od počátku. Protože $\widehat{Df} = \xi \hat{f}(\xi)$, je

$$\|Df\|_{L^2}^2 = \|\widehat{Df}\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(\xi)|^2 \xi^2 \, d\xi \,,$$

tudíž Df analogicky měří rozptýlenost $\hat{f}$ od počátku. Snadno se ověří, že X a D jsou samoadjugované, a $DXf - XDf = \frac{1}{2\pi i} f$. Kvantitativním vyjádřením principu neurčitosti je následující tvrzení:

Věta 23.14. [Heisenbergův princip neurčitosti.] Nechť $f(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, a $\|f\|_{L^2} = 1$. Potom

$$\|Xf\|_{L^2} \|Df\|_{L^2} \geq \frac{1}{4\pi} \,.$$

Rovnost nastává, právě když f je (vhodně škálovaný) gausián.