

21. ABSTRAKTNÍ FOURIEROVY ŘADY.

Opakování. Vektorový prostor X je množina, jejíž prvky lze sčítat, násobit skalárem (typicky z \mathbb{C}), a obsahuje prvek $\mathbf{0}$ (nulový vektor.)

Norma je přiřazení $x \mapsto \|x\|$, splňující:

1. $\|x\| \geq 0$, a $\|x\| = 0$ právě když $x = \mathbf{0}$
2. $\|ax\| = |a|\|x\|$ pro $\forall a \in \mathbb{C}$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Δ -nerovnost)

Pomocí normy definujeme konvergenci posloupnosti $\{x_n\} \subset X$: $x_n \rightarrow x_0$ právě když $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$.

A konvergenci řady: $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = s$ (kde $x_k, s \in X$), právě když $s_n \rightarrow s$, kde $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$.

Definice. Posloupnost $\{x_n\}$ se nazve cauchyovská, jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) [m, n \geq n_0 \implies \|x_n - x_m\| < \varepsilon].$$

Prostor, ve kterém cauchyovská posloupnost je vždy konvergentní (tj. má limitu) se nazývá úplný.

Normovaný vektorový prostor, který je úplný, se nazývá Banachův prostor.

Příklady. ① \mathbb{R}^n (s eukleidovskou normou) je úplný prostor (dokázáno loni v přednášce MAF042)

② Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $p \geq 1$. Definujeme

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ je měřitelná, } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

Norma na prostoru $L^p(\Omega)$ se definuje

$$\|f\|_p = \left\{ \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}.$$

Lze dokázat, že $L^p(\Omega)$ je úplný prostor. Viz například Jarník, Integrovaní počet II, Věta 199, s. 545.

Definice. Nechť X je normovaný vektorový prostor, $\{x_k\} \subset X$. Řekneme, že $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ absolutně konverguje, jestliže řada (čísel) $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ konverguje.

Věta 21.1. Nechť X je Banachův prostor, $\{x_k\} \subset X$. Jestliže řada $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konverguje absolutně, tak konverguje.

Opakování. Skalární součin je přiřazení $x, y \mapsto \langle x, y \rangle$, splňující:

1. přiřazení $x \mapsto \langle x, y \rangle$ je lineární (při y pevném)
2. $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$
3. $\langle x, x \rangle \geq 0$, a $\langle x, x \rangle = 0$ právě když $x = \mathbf{0}$.

Poznámky.

• Z 1., 2. plyne: $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$, a $\langle ax, y \rangle = a\langle x, y \rangle$, $\langle x, ay \rangle = \bar{a}\langle x, y \rangle$.

• (důležité) skalární součin vždy vytváří normu předpisem $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Platí tzv. Cauchy-Schwartzova nerovnost

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Definice. Prostor se skalárním součinem, který je úplný (vzhledem k normě, vytvořené skalárním součinem), se nazývá Hilbertův prostor.

Úmluva. V dalším značí H Hilbertův prostor. Tj. prostor se skalárním součinem, který uvažujeme automaticky s normou $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, a který je úplný.

Příklad. Prostor $L^2(\Omega)$ se skalárním součinem

$$\langle f, g \rangle := \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx$$

je Hilbertův prostor. (Samozřejmě \mathbb{R}^n je Hilbertův, ale nás budou nadále zajímat nekonečně-dimenzionální případy.)

Lemma 21.1.

1. přiřazení $x \mapsto \|x\|$ je spojitě
2. přiřazení $x, y \mapsto \langle x, y \rangle$ je spojitě

Definice. Řekneme, že $\{x_n\} \subset H$ tvoří ortogonální (OG) systém, jestliže $x_n \neq \mathbf{0}$, a $\langle x_n, x_m \rangle = 0$ pro $m \neq n$. Systém se nazve ortonormální, pokud navíc $\|x_n\| = 1$ pro $\forall n$.

Příklad. Trigonometrický systém

$$\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \dots\}$$

je OG v prostoru $L^2(0, 2\pi)$. Viz Lemma 20.1.

Z ortogonálního systému vznikne ortonormální, klademe-li $\tilde{x}_n = x_n/\|x_n\|$. ON trigonometrický systém je

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \dots \right\}.$$

Klíčová otázka kapitoly. Je dán nějaký OG systém $\{x_n\} \subset H$, a my se ptáme, zda každý prvek $x \in H$ lze vyjádřit jako $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$.

Věta 21.2. Nechť $\{x_n\} \subset H$ je OG systém, $c_k \in \mathbb{C}$, nechť řada $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ konverguje a má součet $x \in H$. Potom

$$c_k = \frac{\langle x, x_k \rangle}{\langle x_k, x_k \rangle}. \quad (Fk)$$

Definice. Nechť $\mathcal{S} = \{x_n\} \subset H$ je OG systém, a $x \in H$ je libovolné. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$, kde c_k jsou definována v (Fk) výše, se nazývá Fourierova řada prvku x vzhledem k systému \mathcal{S} .

Značí se $F_{x,\mathcal{S}}$. Čísla c_k se nazývají Fourierovy koeficienty (prvku x vzhledem k systému \mathcal{S} .)

Věta 21.3. Nechť $\mathcal{S} = \{x_n\} \subset H$ je OG systém, $x \in H$ je libovolné, c_k a $F_{x,\mathcal{S}}$ jsou jak řečeno výše. Potom platí:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|x_k\|^2 \leq \|x\|^2$
2. řada $F_{x,\mathcal{S}}$ konverguje (ve smyslu normy v H)
3. $F_{x,\mathcal{S}} = x$ právě tehdy, když v bodě 1. nastává rovnost.

Definice. OG systém $\{x_n\} \subset H$ se nazve úplný, pokud platí: je-li $x \in H$ takové, že $\langle x, x_n \rangle = 0$ pro $\forall n$, pak nutně $x = \mathbf{0}$.

Příklady. ① Trigonometrický systém je úplný v $L^2(0, 2\pi)$. ② OG systémy probírané na cvičení (Legendreovy, Hermitovy, Čebyševovy polynomy) jsou vesměs úplné v odpovídajících prostorech

Věta 21.4. Nechť H je Hilbertův prostor, $\mathcal{S} = \{x_n\}$ je OG systém. Potom je ekvivalentní:

1. systém $\{x_n\}$ je úplný
2. pro $\forall x \in H$ platí $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|x_k\|^2 = \|x\|^2$
3. pro $\forall x \in H$ platí $F_{x,\mathcal{S}} = x$

Zde $c_k, F_{x, \mathcal{S}}$ jsou Fourierovy koeficienty resp. Fourierova řada pro x vzhledem k systému $\{x_n\}$.

***Věta 21.5.** [O nejlepší aproximaci.] Nechť H je Hilbertův prostor, $\mathcal{S} = \{x_n\} \subset H$ je OG systém. Nechť $x \in H$ je libovolné, c_k jsou Fourierovy koeficienty prvku x vzhledem k systému $\{x_n\}$, a $a_k \in \mathbb{C}$ libovolná čísla taková, že $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ konverguje. Potom

$$\|x - \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k\| \leq \|x - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k\|,$$

a rovnost nastává právě když $c_k = a_k$ pro $\forall k$.

Definice. Nechť X je vektorový prostor. Množina $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ se nazve (algebraická) báze X , pokud každé $x \in X$ lze jediným způsobem napsat jako *konečný součet* $\sum_{k=1}^N c_k x_{\alpha_k}$, kde $c_k \in \mathbb{C}$.

Nechť X je prostor s normou. Spočetná množina $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se nazve Schauderova báze X , pokud každé $x \in X$ lze jediným způsobem napsat jako *součet řady* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$, kde $c_k \in \mathbb{C}$.

Poznámky.

- v konečně-dimenzionálním prostoru je algebraická báze totéž co Schauderova báze; obě báze jsou konečné
- pokud $\dim X = \infty$, je algebraická báze zpravidla nespočetná. Často však existuje Schauderova báze. Prakticky vzato je pohodlnější pracovat s řadou (jakožto spočetnou lineární kombinací), než konečnými součty prvků, které vybírám z nespočetné algebraické báze.
- z Věty 21.4. vyplývá, že úplný OG systém je příkladem Schauderovy báze (jednoznačnost koeficientů plyne z Věty 21.2.)