

A. Nalezňte Fourierovu transformaci funkcí:

1.  $f(x) = -\chi_{(-1,0)}(x) + \chi_{(0,1)}(x)$
2.  $f(x) = (1+x)\chi_{(-1,0)}(x) + (1-x)\chi_{(0,1)}(x)$
3.  $f(x) = \chi_{(-\pi,\pi)}(x) \sin x$
4.  $f(x) = \chi_{(-\pi/2,\pi/2)}(x) \cos x$
5.  $f(x) = \exp(-a|x|) \cos(bx)$ ,  $a > 0$ .

Pozn.:  $\chi_{(a,b)}(x)$  je charakteristická funkce intervalu  $(a, b)$ .

B. Nalezňte Fourierovu transformaci funkcí:

1.  $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$ ,  $a > 0$ .
2.  $f(x) = \frac{1}{x^2+i}$
3.  $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$
4.  $f(x) = \frac{1}{x+i}$  a potažmo  $f(x) = \frac{1}{(x+i)^n}$
5.  $f(x) = \frac{x}{(x-i)^2}$
6.  $f(x) = \frac{1}{x^2+4ix-3}$

Návod: integrujte funkci  $\exp(2\pi i \xi z) f(z)$  přes horní ( $\xi < 0$ ) a dolní (pokud  $\xi > 0$ ) polokružnici o středu 0 a poloměru  $R$ . Užijte reziduovou větu a limitní přechod  $R \rightarrow \infty$ .

C. Nalezněte Fourierovu transformaci funkcí:

1.  $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$

2.  $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x} + 2}$

3.  $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{1-x} + e + 1}$

4.  $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 4}$

Návod: integrujte funkci  $\exp(2\pi i \xi z) f(z)$  přes obdélník s vrcholy  $R, R + 2\pi i, -R + 2\pi i, -R$ . Užijte reziduovou větu a limitní přechod  $R \rightarrow \infty$ .

D. Nalezněte Fourierovu transformaci funkcí:

1.  $f(x) = \chi_{(-1,1)}(x)$  a s její pomocí  $f(x) = \chi_{(a,b)}(x)$ ,  $a < b$ .

2.  $f(x) = \exp(-ax^2)$  a  $f(x) = x \exp(-ax^2)$ . (Užijte fakturu  $\mathcal{F}[\exp(-\pi x^2)](\xi) = \exp(-\pi \xi^2)$  a Věty 23.1.(5), 23.4.(2).)