Výpočet exponenciály matice reziduovou větou

Naším cílem je ukázat, že

$$\exp(At) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\varphi} e^{zt}(zI - A)^{-1}\, dz = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \mathrm{res}_{z=\lambda} \left\{ e^{zt}(zI - A)^{-1} \right\}, \qquad (1)$$

kde A je (čtvercová) matice, t libovolné číslo, $\exp(At)$ je exponenciála matice, definovaná jako

$$\exp(At) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!},$$

I je jednotková matice a φ je libovolná jednoduchá uzavřená křivka, obíhající v kladném smyslu spektrum matice $\sigma(A)$.
Ve výrazu (1) se vyskytuje integrál z matice

$$H(z) = e^{zt}(zI - A)^{-1} \qquad (2)$$

– ten chápeme přirozeně tak, že výsledkem je matice, která vznikne vyintegrováním jednotlivých prvků. Analogicky reziduum matice je matice, sestávající z reziduí jednotlivých prvků.
Pak ovšem druhá rovnost v (1) plyne z reziduové věty, pokud ukážeme, že jednotlivé prvky matice $H(z)$ jsou funkce holomorfní se singularitami nejvýše v bodech spektra A.
To plyne ihned ze vzorce pro výpočet inverzní matice. Je-li například

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

je

$$H(z) = \frac{e^{zt}}{(z-a)(z-d) - bc} \begin{pmatrix} z-d & b \\ c & z-a \end{pmatrix}.$$

Singularity tedy pocházejí z nulových bodů polynomu $(z-a)(z-d) - bc$, což jsou právě body spektra A. Obecně užijeme vzorce

$$C^{-1} = (\det C)^{-1} C^{ad},$$

kde C^{ad} je tzv. adjungovaná matice. Prvek d_{ij} matice C^{ad} se rovná $(-1)^{i+j}$ krát determinant matice, která vznikne z C vynecháním i-tého sloupce a j-tého řádku.

Je tudíž

$$H(z) = \frac{e^{zt}}{\det(zI - A)}(zI - A)^{ad};$$

prvky matice $(zI - A)^{ad}$ jsou zřejmě holomorfní funkce - dokonce jsou to polynomy stupně nejvýše $n-1$ - a singularity $H(z)$ tedy pocházejí z nulových bodů charakteristického polynomu $\det(zI - A)$, tj. právě bodů spektra A. Ještě poznamenejme, že ne všechny prvky matice $H(z)$ mají v každém bodě spektra A singularitu - pak je samozřejmě odpovídající reziduum rovno nule.

Zbývá tedy ukázat první rovnost v (1). K tomu potřebujeme zavést normu matice. Norma vektoru je definována jako

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}.$$

Normu matice definujeme jako

$$\|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Norma matice má následující vlastnosti:

I. $\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$.

II. $\|kA\| = |k| \, \|A\|$.

III. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

IV. $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$.

V. Jsou-li a_{ij} prvky matice A, je

$$\max_{ij} |a_{ij}| \leq \|A\| \leq \sum_{ij} |a_{ij}|.$$

Důkaz:

I. Pro $x = 0$ zjevné, pro $x \neq 0$ plyne z definice.

II. Zjevné.

III. Užitím trojúhelníkové nerovnosti pro normu vektoru a bodu I. máme

$$\|(A+B)x\| = \|Ax+Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \|A\|\,\|x\| + \|B\|\,\|x\|$$

a zbytek je snadný.

IV. Podobně jako III.

V. Nechť e_j je vektor kanonické báze a $a_{\cdot j}$ vektor, tvořící j-tý sloupec matice A. Dle bodu I. je

$$\|A\|\,\|e_j\| \geq \|Ae_j\| = \|a_{\cdot j}\| \geq |a_{ij}|,$$

z čehož plyne první nerovnost.

Opačnou nerovnost dostaneme takto: Buď E_{ij} matice s jedničkou na pozici $_{ij}$ a nulami jinde. Snadno se nahlédne, že $\|E_{ij}\| = 1$. Užitím bodů II. a III. pak máme

$$\|A\| = \left\|\sum_{ij} a_{ij}E_{ij}\right\| \leq \sum_{ij} \|a_{ij}E_{ij}\| = \sum_{ij} |a_{ij}|\,\|E_{ij}\| = \sum_{ij} |a_{ij}|.$$

Nyní definujeme pojem konvergence matice: řekneme, že matice A_n konvergují k matici A, pokud $\|A_n - A\| \to 0$. Vzhledem k bodu V. to je totéž, jako že $a_{ij}^n \to a_{ij}$ pro každé $_{ij}$, kde a_{ij}^n resp. a_{ij} jsou prvky matice A_n resp. A. Dále řekneme, že řada matic

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \tag{3}$$

konverguje, pokud existuje matice A tak, že $S_n \to A$, kde S_n značí n-tý částečný součet řady (3). Konečně říkáme, že řada (3) konverguje absolutně, pokud konverguje (číselná) řada $\sum_k \|A_k\|$.

Tvrzení 1. *Pokud řada (3) konverguje absolutně, pak konverguje.*
Důkaz: z absolutní konvergence vyplývá pomocí V., že pro každé $_{ij}$ absolutně konverguje a tudíž též konverguje řada $\sum_k a_{ij}^k$. Označme její součet a_{ij}. Pak - opět dle V. - matice $A = (a_{ij})$ je součtem řady (3).

Důsledkem je mimo jiné, že řada, definující exponenciálu matice, konverguje absolutně, neboť $\left\|A^k/k!\right\| \leq \|A\|^k\,|t|^k/k!$ (dle II., IV.), což jsou členy konvergentní řady.

Tvrzení 2. *Nechť* $\|Q\| < 1$. *Pak matice* $I - Q$ *je invertibilní a platí*

$$(I - Q)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k,$$

přičemž řada vpravo[1] *konverguje absolutně.*
Důkaz: uvedená řada skutečně konverguje absolutně, neboť $\left\|Q^k\right\| \leq \|Q\|^k$ a $\|Q\| < 1$. Nechť S resp. S_n je její součet resp. n-tý částečný součet. Snadným výpočtem dostaneme

$$(I - Q)S_n = I - Q^{n+1}$$

a limitním přechodem

$$(I - Q)S = I,$$

neboť $\|Q^{n+1}\| \leq \|Q\|^{n+1} \to 0$. Analogicky se ukáže, že $S(I - Q) = I$.

Nyní tedy dokažme první rovnost v (1). Z holomorfnosti $H(z)$ mimo $\sigma(A)$ již víme, že integrál nezávisí na tom, po jaké křivce spektrum matice oběhneme. Volme tedy φ jako kružnici o poloměru $R > \|A\|$. Dle Tvrzení 2 je matice $zI - A = z(I - A/z)$ pro $|z| \geq R$ invertibilní, tj. zvolená křivka opravdu spektrum obíhá. Navíc máme

$$(zI - A)^{-1} = [z(I - A/z)]^{-1} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{z^{k+1}}$$

a řada vpravo konverguje absolutně. Funkci $H(z)$ umíme tedy na křivce φ napsat jako součin dvou absolutně konvergentních řad:

$$H(z) = e^{zt}(zI - A)^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n t^n}{n!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{z^{k+1}} \right).$$

Můžeme tedy pronásobit "každý s každým" a integrovat výsledek člen po členu.[2] Po integrování však zůstane pouze $2\pi i$ krát člen u z^{-1}, a ten, jak

[1] Klademe $Q^0 = I$.

[2] Máme-li být úplně přesní: jde o to, že absolutně konvergentní číselnou řadu lze s absolutně konvergentní řadou matic vynásobit člen po členu, a dále že absolutně konvergentní řadu matic lze integrovat člen po členu. Tato tvrzení opět plynou z analogických tvrzení pro číselné řady použitím vztahů sub V.

snadno nahlédneme, vznikne z těch prvků součinu, kde $k = n$, neboli je roven

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \exp(At)\,.$$

Důkaz je dokončen.

Aplikace. Exponenciála matice je důležitá proto, že matice $\exp(At)$ je tzv. fundamentální řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic

$$x' = Ax.$$

Užitečnost vzorce (1) je v tom, že umožňuje spočítat přímo jednotlivé prvky $\exp(At)$, aniž bychom museli určovat Jordanův tvar A.
Uvažujme systém

$$\begin{aligned} x' &= -5x + 4y \\ y' &= -x - y \end{aligned}$$

Tedy

$$H(z) = e^{zt}(zI - A)^{-1} = e^{zt} \begin{pmatrix} z+5 & -4 \\ 1 & z+1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{(z+1)e^{zt}}{(z+3)^2} & \frac{4e^{zt}}{(z+3)^2} \\ \frac{e^{zt}}{(z+3)^2} & \frac{(z+1)e^{zt}}{(z+3)^2} \end{pmatrix}.$$

Spektrum A obsahuje jedině -3, a tudíž

$$\exp(At) = \mathrm{res}_{z=-3} H(z) = e^{-3t} \begin{pmatrix} 1-2t & 4t \\ -t & 1+2t \end{pmatrix}.$$