Cvičení na komplexní čísla.

A. Dokažte (z, $w \in \mathbb{C}$):

1.

$$\operatorname{Re}(z \pm w) = \operatorname{Re} z \pm \operatorname{Re} w$$
$$\operatorname{Im}(z \pm w) = \operatorname{Im} z \pm \operatorname{Im} w$$

2.

$$\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$$
$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$
$$\overline{1/z} = 1/\overline{z}$$

3.

$$|z+w| \leq |z| + |w|$$
$$|z+w| \geq |z| - |w|$$
$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

4.

$$z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$$
$$z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$$

B. U funkcí $f(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zkoumejte: sudost, lichost, periodicitu, obor hodnot. Na co se zobrazí svislé/vodorovné přímky v $\mathbb{C}$?

1. $f(z) = \exp z$
2. $f(z) = \sin z$ (návod: $\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$)
3. $f(z) = \cos z$
4. $f(z) = 1/z$

C. Pomocí Cauchy-Riemannových podmínek vyšetřete holomorfnost funkcí:

1. $f(z) = z^2$
2. $f(z) = \sin z$
3. $f(z) = \exp z$
4. $f(z) = \frac{1}{z}$
5. $f(z) = \operatorname{Im} z$
6. $f(z) = \overline{z}$
7. $f(z) = |z|^2$
8. $f(z) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$

D. Najděte obecné mocniny:

1. $m_{1/n}(1)$, kde $n \in \mathbb{N}$
2. $m_i i$
3. $m_n(a)$, kde $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$
4. $m_{\sqrt{2}}(-1)$