

1. příklad. Definujeme

$$F(a) = \int_{-\infty}^0 \frac{\exp x}{x} \sinh ax \, dx.$$

- (i) pro která a je integrál konečný ?
- (ii) derivujte podle a — podrobně ověřte předpoklady věty.
- (iii) dopočítejte $F(a)$.

2. příklad. Plocha $P \subset R^3$ je určena podmínkami ($a > 0$ je pevné)

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2 \\ 0 &\leq z \leq x + y \end{aligned}$$

- (i) najděte parametrizaci P
- (ii) vypočítejte plošný integrál 1. druhu $\int_P f \, dS$, kde $f = x + y$

(iii) ověřte vztah $d\Phi^*(\omega) = \Phi^*(d\omega)$, kde $\omega = x^4 + y^4$, a $\Phi : (r, u) \mapsto (x, y)$ je určeno vztahy $x = r\sqrt{\cos u}$, $y = r\sqrt{\sin u}$.
(Předpokládáme $u \in (0, \pi/2)$.)

3. příklad. Je dána úloha

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= \int_0^{\pi/4} \left\{ \frac{(y')^2}{\cos x} + \frac{y}{\cos^2 x} \right\} dx \\ y(0) &= 0, \quad y(\pi/4) = 1/2 \end{aligned}$$

- (i) najděte všechny extrémály
- (ii) jaký druh extrému představují?

4. příklad. Je dána funkce (s periodou 2π)

$$f(x) = \begin{cases} 1/\pi, & x \in (-\pi/2, \pi/2) \\ 0, & x \in (-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi) \end{cases}$$

- (i) spočítejte Fourierovy koeficienty
- (ii) napište Fourierovu řadu (výsledný zápis co možná zjednodušte)
- (iii) čemu je roven její součet ? – vysvětlete a zdůvodněte podrobně
- (iv) napište Parsevalovu rovnost: obecně a pro tento případ
- (v) bonus za sečtení číselné řady