20.2.2007

1. příklad. Definujeme

$$F(a) = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1 + a\cos x}{1 - a\cos x}\right) \frac{dx}{\cos x}.$$

(i) pro která $a \in R$ je rozumné uvažovat tento integrál a proč ?

(ii) derivujte podle a — podrobně ověřte předpoklady věty.

(iii) dopočítejte $F(a)$.

2. příklad. Zobecněná křivka $\gamma \subset R^2$ je definována jako hranice množiny

$$\{x^2 + y^2 < a^2\} \cap \{x > y\}$$

orientovaná v kladném smyslu. Spočítejte křivkový integrál 2. druhu $\int_\gamma F \cdot ds$, kde $F = (y^2, x + 2xy)$

(i) přímo z definice, tj. pomocí vhodné parametrizace γ

(ii) pomocí Greenovy věty

(iii) ověřte vztah $d\Phi^*(\omega) = \Phi^*(d\omega)$, kde $\omega = xdy \in E^1(R^2)$, a $\Phi : (u, v, w) \mapsto (x, y)$ je určeno vztahy $x = u + v - w$, $y = u^2$.

3. příklad. Je dána úloha

$$\Phi(y) = \int_0^1 (y')^2\sqrt{1 - x^2} - 2y\,dx$$
$$y(0) = 2, \qquad y(1) = \sqrt{3}.$$

(i) najděte *všechny* extremály

(ii) vyšetřete, jaký druh extrému představují

4. příklad. Funkce f je *lichá*, 2π-periodická, a platí

$$f(x) = x^2 \qquad \text{pro } x \in [0, \pi).$$

(i) spočítejte Fourierovy koeficienty

(ii) napište Fourierovu řadu

(iii) nakreslete graf $f(x)$ na intervalu $[0, 2\pi]$

(iv) zformulujte větu o konvergenci Fourierovy řady; vysvětlete podrobně (příp. nakreslete), co z ní plyne v daném případě

(v) napište Parsevalovu rovnost: obecně a pro danou funkci

① $F(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\right)\frac{dx}{\cos x}$; $\quad a\in(-1,1)$.

$\frac{\partial}{\partial a} f(a,x) = \frac{2}{1-a^2\cos^2 x}$;

mejorante: $a\in(-\eta,\eta)$; $\eta\in(0,1)$ [illegible]:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \leq \frac{2}{1-\eta^2} \in L^1\left(0,\tfrac{\pi}{2}\right).$$

$$f(0,x)\equiv 0 \in L^1\left(0,\tfrac{\pi}{2}\right).$$

[illegible]: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{1-a^2\cos^2 x}\,dx$ $\Bigg|$ $t=\operatorname{tg} x\in(0,\infty)$; $dx=\frac{dt}{1+t^2}$; $\cos^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}$

$$\frac{2}{1-a^2\frac{t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{1}{1+t^2}=\frac{2}{1+t^2-a^2t^2}=\frac{2}{(1-a^2)t^2+1}\ ;$$

[illegible]: $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dy}{\alpha^2y^2+1}=\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}$

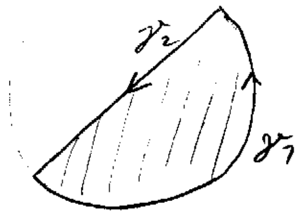
$$\Rightarrow F'(a)=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$

$$F(a)=\pi\arcsin a + C\ ;$$

$$F(0)=0\Rightarrow C=0.$$

(2) $x^2+y^2<a^2$

$x > y$



$\underset{\sim}{F}=(y^2, x+2xy)$

γ_1: $\varphi(t)=(a\cos t, a\sin t)$; $t\in\left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

$\varphi'(t)=(-a\sin t, a\cos t)$

$\overline{F}\circ\varphi = (a^2\sin^2 t, a\cos t+2a^2\sin t\cos t)$

$= a^2(\sin^2 t, \cos t+\sin 2t)$

$$a^3\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\pi/4}\left[-a^3\sin^3 t + a^2\cos^2 t + 2a^3\sin t\cos^2 t\right]dt$$

$= a^2\cos^2 t + \qquad = \frac{1}{2}a^2\pi + \frac{1}{2}a^3\sqrt{2}$

$\int \sin^3 t\,dt = -\frac{1}{3}\sin^2 t\cos t - \frac{2}{3}\cos t$

$\int \sin t\cos^2 t = -\frac{1}{3}\cos^3 t$

γ_2: $\varphi(t)=(t,t)$; $t\in\left(-\frac{a}{\sqrt2}, \frac{a}{\sqrt2}\right)$

$\varphi'(t)=(1,1)$.

$\overline{F}\circ\varphi=(t^2, t+2t^2)$

$$\int_{-\frac{a}{\sqrt2}}^{\frac{a}{\sqrt2}} 3t^2+t\,dt = \left[t^3\right]_{-\frac{a}{\sqrt2}}^{\frac{a}{\sqrt2}} = a^3\frac{1}{2\sqrt2\cdot}$$, $-$

Green: $\operatorname{rot}\underset{\sim}{F}=\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y} = 1+2y-2y=1$.

$$\int_\Omega \operatorname{rot}\underset{\sim}{F}\,d\lambda_2=\lambda_2(\Omega)=\frac{1}{2}\pi a^2$$

2b $\omega = x\,dy \in E^1(\mathbb{R}^2)$.

$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $(u,v,w) \longmapsto (x,y)$ $\quad \begin{cases} x = u+v-w \\ y = u^2 \end{cases}$

$d\omega = dx \wedge dy$; $\qquad dx = du + dv - dw$

$\qquad\qquad\qquad\qquad dy = 2u\,du$

$\phi^*(d\omega) = (du + dv - dw) \wedge (2u\,du)$

$\qquad = 2u\,(-du \wedge dv + du \wedge dw)$.

$\phi^*(\omega) = (u+v-w) \wedge 2u\,du$

$\qquad = (2u^2 + 2uv - 2uw)\,du$

$d\phi^*(\omega) = 2u\,dv \wedge du - 2u\,dw \wedge du$ ✓

#38. $\Phi(y) = \int_0^1 (y')^2\sqrt{1-x^2} - 2y \, dx$; $y(0)=2$; $y(1)=\sqrt{3}$.

3

$f = r^2\sqrt{1-x^2} - 2y$

$f_r = 2r\sqrt{1-x^2}$;

$f_y = -2$

E.L. $-\left(2y'\sqrt{1-x^2}\right)' - 2 = 0$

$y'\sqrt{4-x^2} + x = c$

$\cancel{y' + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = c\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}}$

$\cancel{y + \sqrt{4-x^2} = c \cdot \arcsin x + d}$

$\cancel{y(0) =}$

$y' + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{c}{\sqrt{4-x^2}}$

$y - \sqrt{4-x^2} = c \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + d$;

dosazení $\Rightarrow c = d = 0$. $\boxed{y = \sqrt{4-x^2}}$

$f_{rr} = 2\sqrt{4-x^2} > 0$ -- podezření na minimum.

$f_{ry} = f_{yy} = 0 \Rightarrow$ Jacobiho rce: $\left(-2\sqrt{4-x^2}\,u'\right)' = 0$

$-2\sqrt{4-x^2}\,u' = -2c$

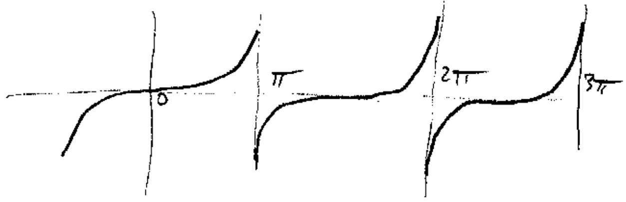
$u' = \frac{c}{\sqrt{4-x^2}}$;

$u = c\arcsin\left(\frac{x}{4}\right) + d$

nemá konj. body

$\Rightarrow$ lokální minimum

(4) $f(t)= x^2;\ x\in[0,\pi)$; liché ; 2π – periodické!



$$a_k = 0 \quad \forall k \geq 0;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kx = \frac{2}{\pi}\underbrace{\int_0^{\pi} t^2 \sin kx\, dx}_{I_k};$$

$$I_k = \left[x^2\left(-\frac{\cos kx}{k}\right)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2x\,\frac{\cos kx}{k}\,dx;$$

$$= -\frac{\pi^2}{k}(-1)^k + \frac{2}{k}J_k;$$

$$J_k = \int_0^{\pi} x\cos kx\,dx = \left[x\,\frac{\sin kx}{k}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin kx$$

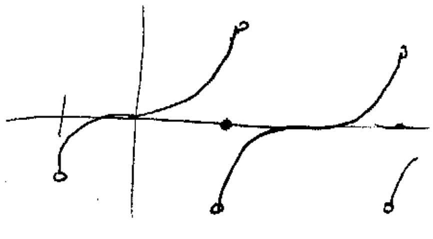
$$= \cancel{\frac{\pi}{k}(-1)^k} - \frac{1}{k}\left[-\frac{\cos kx}{k}\right]_0^{\pi}$$

$$= \cancel{(-1)^k\frac{\pi}{k}} + \frac{1}{k^2}\left((-1)^k - 1\right).$$

$$I_k = -\frac{\pi^2}{k}(-1)^k + \cancel{\frac{2}{k^2}\pi(-1)^k} + \frac{2}{k^3}\left((-1)^k - 1\right) \checkmark$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}I_k;$$

$$F_f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \ . =$$



Parseval: $$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2 dx = 2\int_0^{\pi} x^4 dx = 2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{5}\pi^5.$$

(LS): $$\frac{2}{5}\pi^4 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$$