

A. Spočítejte obsahy ploch:

1. $P = \{[x, y, z]; x^2 + y^2 = 1, y^2 + z^2 \leq 1\}$,
2. $P = \{[x, y, z]; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 \leq x\}$,
3. $P = \{[x, y, z]; (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} + z = 1, z \geq 0\}$,
4. $P = \{[x, y, z]; x^2 - y^2 = 2z, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

B. Spočítejte délky křivek:

1. $\gamma = \{[3t, 3t^2, 2t^3]; t \in \langle 0, 1 \rangle\}$,
2. $\gamma = \{[x, y, z]; (x - y)^2 = x + y, x^2 - y^2 = \frac{9}{8}z^2\}$ z bodu $[0, 0, 0]$ do bodu $[1, 0, \frac{2\sqrt{2}}{3}]$,
3. $\gamma = \{[x, y, z]; x^2 + y^2 = z, \frac{y}{x} = \operatorname{tg} z, x > 0, y > 0\}$ z bodu $[0, 0, 0]$ do bodu $[\sqrt{\frac{\pi}{8}}, \sqrt{\frac{\pi}{8}}, \frac{\pi}{4}]$,
4. $\gamma = \{[e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t, e^{-t}]; t \in \langle 0, \infty \rangle\}$.

C. Spočítejte křivkové a plošné integrály 1. druhu.

1. $\int_{\gamma} (x^2 + y^2 + z^2) ds$, kde $\gamma = \{[\cos t, \sin t, t] : t \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$,
2. $\int_{\gamma} (|x|^{\frac{3}{4}} + |y|^{\frac{3}{4}}) ds$, kde $\gamma = \{[x, y] : |x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} = 1\}$,
3. $\int_{\gamma} x^2 ds$, kde $\gamma = \{[x, y, z] : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}$,
4. $\int_P (x + y + z) dS$, kde $P = \{[x, y, z] : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$,
5. $\int_P \frac{1}{(1+x+y)^2} dS$, kde P je povrch tělesa $\{[x, y, z] : x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$,
6. $\int_P |xyz| dS$, kde $P = \{[x, y, z] : z = x^2 + y^2, z \leq 1\}$.

D. Spočítejte křivkové a plošné integrály 2. druhu.

1. $\int_{\gamma} (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$, kde $\gamma = \{[x, y] : y = x^2, x \in \langle -1, 1 \rangle\}$,
2. $\int_{\gamma} (x + y) dx + (x - y) dy$, kde $\gamma = \{[x, y] : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ probíhaná ve směru hodinových ručiček,
3. $\int_{\gamma} \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, kde γ je obvod čtverce s vrcholy o souřadnicích $[1, 0]$, $[0, 1]$, $[-1, 0]$, $[0, -1]$ probíhaný proti směru hodinových ručiček.
4. $\int_P x dy dz + y dz dx + z dx dy$, kde P je jednotková sféra orientovaná vně,
5. $\int_P (y - z) dy dz + (z - x) dz dx + (x - y) dx dy$, kde P je vnější strana plochy $\{[x, y, z] : x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq 1\}$,
6. $\int_P x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, kde P je vnější strana sféry o poloměru 1 a středu $[1, 1, 1]$.

E. Pomocí Greenovy věty spočtete křivkové integrály:

1. $\int_{\gamma} xy^2 dy - x^2y dx$, kde γ je jednotková kružnice probíhaná proti směru hodinových ručiček,
2. $\int_{\gamma} (x + y) dx - (x - y) dy$, kde γ je elipsa $\{[x, y] : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ probíhaná ve směru hodinových ručiček,
3. $\int_{\gamma} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - mx) dy$, kde γ je horní půlkružnice $\{[x, y] : x^2 + y^2 = ax\}$ probíhaná od bodu $[a, 0]$ do bodu $[0, 0]$.

F. Pomocí Stokesovy věty spočtete křivkové integrály:

1. $\int_{\gamma} y dx + z dy + x dz$, kde γ je kružnice $\{[x, y, z] : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}$ probíhaná proti směru hodinových ručiček,
2. $\int_{\gamma} (x^2 - yz) dx + (y^2 - xz) dy + (z^2 - xy) dz$, kde γ je část křivky $\{[\cos t, \sin t, \frac{t}{2\pi}] : t \in R\}$ probíhaná od bodu $[1, 0, 0]$ do bodu $[1, 0, 1]$,
3. $\int_{\gamma} (y - z) dx + (z - x) dy + (x - z) dz$, kde $\gamma = \{[x, y, z] : x^2 + y^2 = 1, x + z = 1\}$ probíhaná proti směru hodinových ručiček, díváme-li se na ní z osy x .

G. Pomocí Gaussovy věty spočtete plošné integrály:

1. $\int_P x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$, kde P je vnější strana jednotkové sféry,
2. $\int_P (x - y + z) dy dz + (y - z + x) dz dx + (z - x + y) dx dy$, kde P je vnější strana plochy $\{[x, y, z] : |x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1\}$,
3. $\int_P x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, kde P je vnější strana krychle $\{[x, y, z] : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$,
4. Objem anuloidu.
5. Objem tělesa, ohraničeného plochou $\{[u \cos v, u \sin v, -u + a \cos v] : u \geq 0, v \in (0, 2\pi)\}$ a rovinami $x = 0, z = 0$.

H. Pomocí věty o potenciálu spočtete:

1. $\int_{\gamma} x dy + y dx$, kde γ je libovolná křivka spojující body $[-1, 2]$ a $[2, 3]$,
2. $\int_{\gamma} \frac{y dx - x dy}{x^2}$, kde γ je libovolná křivka spojující $[2, 1]$ a $[1, 2]$, která neprotíná osu y ,
3. $\int_{\gamma} \left(\sin \frac{y}{x} - \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} \right) dx + \cos \frac{y}{x} dy$, kde γ je libovolná křivka spojující $[1, \pi]$ s $[2, \pi]$, která neprotíná osu y .